Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2023

Problema 1 Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.
Solución:
$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) \Longrightarrow f''(x) = e^x(x^2 - x - 2) = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es cóncava ($\smile$) en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y convexa ($\frown$) en el intervalo $(-1, 2)$. La función presenta puntos de inflexión en $\left(-1, \dfrac{12}{e}\right)$ y $(2, 0)$.

Problema 2 Calcula $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 x\, dx$
Solución:
Recordando un poco de trigonometría tenemos:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{2x - \sin 2x}{4}$$

$$F(x) = \int x\sin^2 x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin^2 x\, dx \Longrightarrow v = \dfrac{2x - \sin 2x}{4} \end{array}\right] =$$

$$\frac{2x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int (2x - \sin 2x)\, dx = \frac{2x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} =$$

$$\frac{x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} = \frac{2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{8}$$

$$\int_0^\pi x\sin^2 x\, dx = F(\pi) - F(0) = \frac{2\pi^2 - 1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Problema 3 Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por
$f(x) = \begin{cases} e^{2ax - 4b} & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - x\ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.
(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) Si f es derivable tiene que ser continua y derivable:

- f continua en $x = 1$:
  $\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a-4b}$
  $\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (1 - x\ln x) = 1$
  Luego $e^{2a-4b} = 1 \Longrightarrow 2a - 4b = 0$.

- f derivable en $x = 1$:
  $f'(x) = \begin{cases} 2a \cdot e^{2ax-4b} & \text{si} \quad x < 1 \\ -\ln x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.
  Tenemos $f'(1^-) = 2a \cdot e^{2a-4b}$ y $f'(1^+) = -1 \Longrightarrow 2ae^{2a-4b} = -1$

- $\begin{cases} 2a - 4b = 0 \\ 2ae^{2a-4b} = -1 \end{cases} \Longrightarrow 2ae^0 = -1 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

b) En $x = 2 \Longrightarrow f(x) = 1 - x\ln x \Longrightarrow f(2) = 1 - 2\ln 2$ y
$f'(x) = -\ln x - 1 \Longrightarrow m = f'(2) = -1 - \ln 2$.
La ecuación de la recta tangente es
$y - (1 - 2\ln 2) = -(1 + \ln 2)(x - 2) \Longrightarrow y = -(1 + \ln 2)x + 2 + 2\ln 2 + 1 - 2\ln 2 = -(1 + \ln 2)x + 3 \Longrightarrow y = -(1 + \ln 2)x + 3$

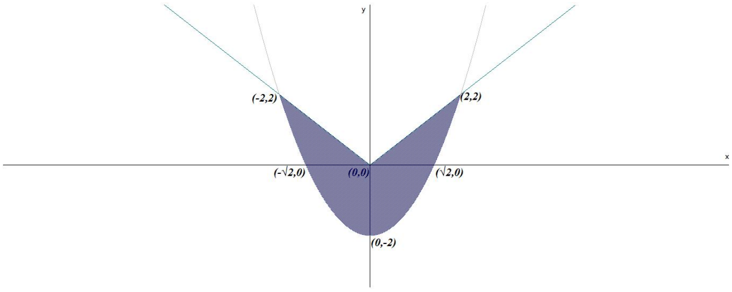
Problema 4 Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan.

b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x = x^2 - 2 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x = x^2 - 2 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} (-2, 2) & \text{si} \quad x < 0 \\ (2, 2) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
Dando valores a las dos funciones dibujamos el recinto



b) Hay dos recintos

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (-x - x^2 + 2)\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-2}^{0} = \frac{10}{3}$$

$$S_2 = S_1 \text{ por simetría} \Longrightarrow S = |S_1| + |S_2| = \frac{10}{3} \cdot 2 = \frac{20}{3} = 6,667\ u^2$$