Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2023

Problema 1 Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \text{ para } x \neq \pm 1$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -1$ No es asíntota, es una discontinuidad evitable (un agujero)

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{2x - 2}{2x} = 2$$

$x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

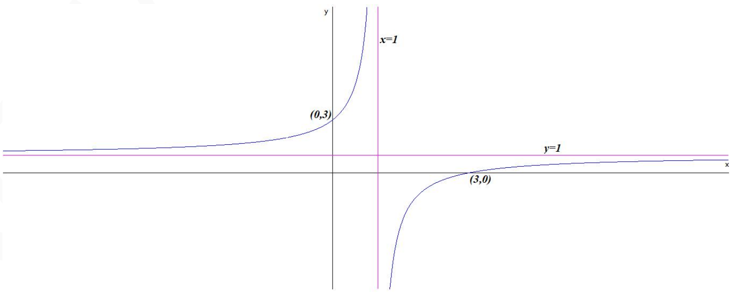
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos y $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow f$ creciente en todo el dominio de la función.



Problema 2 Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\dfrac{1}{9}$.

Solución:

Calculamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas, para ello hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow xe^{3x} = 0 \Longrightarrow x = 0$, luego los límites de integración son los extremos del intervalo $[0, a]$

Calculamos la primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \int xe^{3x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right] = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx =$$

$$\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} = \frac{e^{3x}(3x-1)}{9}$$

$$S = \int_0^a xe^{3x}\,dx = \left.\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}\right]_0^a = e^{3a}\frac{3a-1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Longrightarrow e^{3a}\frac{3a-1}{9} = 0 \Longrightarrow$$

$$3a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Problema 3 Sea la función $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{3}$

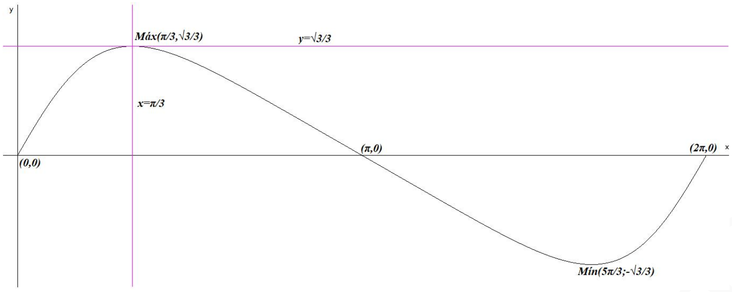
Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(\cos x - 2)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} \\ \\ \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

	$[0, \pi/3)$	$(\pi/3, 5\pi/3)$	$(5\pi/3, 2\pi]$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ y decreciente en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{5\pi}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y un máximo relativo en el punto $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Los puntos de corte con el eje OX serían: $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{\sin x}{2 - \cos x} = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow (0,0)$, $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$.



Como se puede ver en la gráfica estos extremos son absolutos.

b) $b = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ en este punto se ha visto que hay un máximo y, por tanto, la tangente es horizontal $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y la normal es vertical $x = \dfrac{\pi}{3}$

Problema 4 Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$.

Solución:

a)

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}\, dx = \int \left(3 + \frac{12x - 8}{(x-2)^2}\right) dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{12x-8}{(x-2)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} = \dfrac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} \\ 12x - 8 = A(x-2) + B \\ x = 0 \Longrightarrow -8 = -2A + B \\ x = 2 \Longrightarrow 16 = B \\ B = 16, \quad A = 12 \end{array}\right] =$$

$$3x + \int \left(\frac{12}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}\right) dx =$$

$$3x + 12\ln|x-2| + 16\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C$$

b)

$$F(3) = 9 - 16 + C = 5 \Longrightarrow C = 12$$

$$F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + 12$$