Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro k:

$$\left\{\begin{array}{l} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \\ x + y + z = -1 \end{array}\right.$$

a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro k

b) Resuelve el sistema para $k = 1$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$; $|A| = -k(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = -1$

- ☛ Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- ☛ Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y comprueba que es regular.

b) Calcule la matriz inversa de A^2.

c) Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

d) Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X + B = C$.

Solución:

a) Una matriz es **regular** si tiene inversa. Es decir, tiene que ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.
$|A^2| = |A|^2 = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists (A^2)^{-1} \Longrightarrow A^2$ es regular.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

c) $A^2X + B = C \Longrightarrow A^2X = C - B \Longrightarrow X = (A^2)^{-1}(C - B)$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3, X e Y, verifican las siguientes condiciones:

- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad 3×3)
- Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{r} X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X-5Y=\begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} X=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución:
Sean x número de ensayos, y número de novelas y z número de biografías.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{16}(x+y+z)=x \\ z+\dfrac{1}{3}x=2+y \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{4y}{5}+z=105 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} -13x+3y+3z=0 \\ x-3y+3z=6 \\ 5x+8y+10z=1050 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=24 \\ y=55 \\ z=49 \end{array}\right.$$

La estantería tiene 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.