Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t.

$$\left\{\begin{array}{c} tx+y-2z=0 \\ x+y-tz=-1 \\ x+y+z=t \end{array}\right.$$

a) Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t=0$ si es posible.

b) Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -t & -1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{array}\right); \quad |A|=t^2-1=0 \Longrightarrow t=\pm 1$$

Si $t\neq \pm 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
Si $t=0$ el sitema tiene solución única es SCD:

$$\left\{\begin{array}{c} y-2z=0 \\ x+y=-1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-3 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

b) Si $t=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

$$\left\{\begin{array}{c} -x+y-2z=0 \\ x+y+z=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares.

b) Calcule las matrices inversas de A y B.

c) Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

d) Calcule X.

Solución:

a) Una matriz es **regular** si tiene inversa. Es decir, tiene que ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.
$|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow A$ es regular.
$|B| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists B^{-1} \Longrightarrow A$ es regular.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $AXB = A^t - 3B \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(A^t - 3B)B^{-1} \Longrightarrow$
$X = A^{-1}(A^t - 3B)B^{-1}$

d) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Se pide:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $det(A^{-1}B + A) = -1$.

Solución:

a) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = -A \Longrightarrow A^t + A = O$
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21}+1 \\ a_{21}+1 & 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}=0 \\ a_{21}=-1 \\ a_{22}=0 \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) B no tiene inversa si $|B| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{vmatrix} = -b_{12} = 0 \Longrightarrow b_{12} = 0$. Luego $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$ y A es la matriz del apartado anterior.

$$A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}B + A| = 1 - b_{22} = -1 \Longrightarrow b_{22} = 2 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:
Sean x la edad de Pablo, y la edad de Alejandro y z la edad de Alicia.
El reparto proporcional a la edad sería:

$$\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{45} + \frac{y}{45} + \frac{z}{45} = 1$$

Tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z = 45 \\ x+y = 2z-3 \\ \dfrac{9450x}{45} - \dfrac{9450z}{45} = 420 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 45 \\ x+y-2z = 3 \\ x-z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 15 \\ z = 14 \end{cases}$$

Pablo tiene 15 años, Alejandro tiene 16 años y Alicia 14 años. El reparto será:
Pablo recibe $\dfrac{16 \cdot 9450}{45} = 3360$€
Alejandro recibe $\dfrac{15 \cdot 9450}{45} = 3150$€
Alicia recibe $\dfrac{14 \cdot 9450}{45} = 2940$€