Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{c} -x+2y=-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ ax-2y+z=2 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de a.

b) Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x=0$.

c) Si $a=0$, resuelve el sistema si es posible.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ a & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad |A|=4a-4=0 \Longrightarrow a=1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2y=-1 \\ 2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=-1/2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Estos valores cumplen las tres ecuaciones.

c) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} -x+2y=-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=-1/2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1-m & 1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $P = AB^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B.

b) Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Solución:

a) $P = AB^T + C = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$P=\begin{pmatrix} 2-m & 0 & 2-m \\ 2 & 2m+1 & 3 \\ m-1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$|P| = 2m(2-m) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 2$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 3$
- Si $m = 0 \Longrightarrow |P| = 0$ y $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

  el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$
- Si $m = 2 \Longrightarrow |P| = 0$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

  el menor $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$

b) Si $m = 1 \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

Problema 3 En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número

de alumnos matriculados en cada idioma.

Solución:

Sean x número de alumnos de inglés, y número de alumnos de francés y z número de alumnos de alemán.

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0,6(x+y+z) \\ y-10 = z+10 \\ \dfrac{x}{4} = 8+2(y-z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-3y-3z=0 \\ y-z=20 \\ x-8y+8z=32 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=192 \\ y=74 \\ z=54 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) Para $a = 2$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

Solución:

a) $|A| = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$, para estos valores $\nexists A^{-1}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

2) WWW.Yoquieroaprobar.es