Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x+3y+z=5 \\ 2x+az=-4 \\ 4x-3z=a+1 \end{cases}$$

a) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ que tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

b) Resuelve el sistema para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & -4 \\ 4 & 0 & -3 & a+1 \end{array}\right); \quad |A| = 12a+18 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

- Si $a \neq -\frac{3}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -\frac{3}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3/2 & -4 \\ 4 & 0 & -3 & -1/2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+2F_1 \\ F_3+4F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 1/2 & 6 \\ 0 & 12 & 1 & 39/2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 1/2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 15/2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a=1$:

$$\begin{cases} -x+3y+z=5 \\ 2x+z=-4 \\ 4x-3z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible.

Solución:

a) $|B| = 2a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$.
Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$
$\underset{2\times 3}{X} = \underset{2\times 2}{A^{-1}} \cdot \underset{2\times 3}{C} \cdot \underset{3\times 3}{B^{-1}}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

b) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

c) Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $det(P) = det(P^{-1})$.

Solución:

a) $|P| = 2 - a = 0 \Longrightarrow a = 2$
Si $a \neq 2 \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 3$
Si $a = 2 \Longrightarrow |P| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \exists P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $|P| = |P^{-1}| = \dfrac{1}{|P|} \Longrightarrow |P|^2 = 1 \Longrightarrow (2-a)^2 = 1 \Longrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo.

b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$.

c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar.

Solución:
Sean x el número de vehículos A, y el número de vehículos B y z el número de vehículos C,

a) $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=21000 \\ 10000x+15000y+20000z=332000000 \\ \lambda x+y=21000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=21000 \\ 2x+3y+4z=66400 \\ \lambda x+y=21000 \end{array}\right.$

b) Si $\lambda = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=21000 \\ 2x+3y+4z=66400 \\ 3x+y=21000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=3400 \\ y=10800 \\ z=6800 \end{array}\right.$$

Se han vendido 3400 del modelo A, 10800 del B y 6800 del C.

c) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 2 & 3 & 4 & 66400 \\ \lambda & 1 & 0 & 21000 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$

- Si $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 2 & 3 & 4 & 66400 \\ 2 & 1 & 0 & 21000 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 1 & 2 & 24400 \\ 0 & -1 & -2 & -21000 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 1 & 2 & 24400 \\ 0 & 0 & 0 & 3400 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Para $\lambda = 2$ el sistema no tiene solución.

¡¡ WWW.MUSAT.NET !!