Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{r} x-y+mz=-3\\ -mx+3y-z=1\\ x-4y+mz=-6 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m=2$ resuelve el sistema, si es posible.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & m & -3\\ -m & 3 & -1 & 1\\ 1 & -4 & m & -6 \end{array}\right) \quad |A|=3m^2-3=0 \Longrightarrow$$

$$m=-1, \quad m=1$$

Si $m\neq -1$ y $m\neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $m=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 4 & 0 & 4\\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 4F_3+3F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 4 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -3\\ -1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3+3F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m=2$:
$$\left\{\begin{array}{l} x-y+2z=-3\\ -2x+3y-z=1\\ x-4y+2z=-6\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=1\\ z=-2\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Solución:
Sean x el precio de un lápiz, y el precio de un cuaderno y z el precio de una agenda.
$$\left\{\begin{array}{l} 3x+y+z=500\\ 2y+z=500\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=3\lambda\\ z=500-6\lambda\end{array}\right.$$

Como $x>0$, $y>0$ y $z>0 \Longrightarrow 0<\lambda<\dfrac{500}{6}$ y λ es múltiplo de 50 $\Longrightarrow \lambda=50$
Luego los lápices cuestan 0,50 €, los cuadernos 1,5 € y la agenda 2 €.

Problema 3 *(2,5 puntos)*Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m}\\ \sqrt{m} & m & 1\\ \sqrt{m} & 1 & m\end{pmatrix}$, donde $m\geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?

b) Para $m=4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX=12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A|=m(m-1)^2=0 \Longrightarrow m=0$ y $m=1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$

b) Si $m=4 \Longrightarrow \exists A^{-1}=\begin{pmatrix} 5/12 & -1/6 & -1/6\\ -1/6 & 1/3 & 0\\ 1/6 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$
$$AX=12I \Longrightarrow X=12A^{-1}=12\begin{pmatrix} 5/12 & -1/6 & -1/6\\ -1/6 & 1/3 & 0\\ 1/6 & 0 & 1/3\end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$X=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2\\ -2 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & k\\ -1 & k+1\end{pmatrix}$

a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

a) $A^2 = 3I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-k & k(k+2) \\ -k-2 & k^2+k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 1-k=3 \\ k(k+2)=0 \\ -k-2=0 \\ k^2+k+1=3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$k = -2$$

b) Si $k = 0 \Longrightarrow B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}$