Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Octubre 2022

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 & -m & 2 \\ 2m & 1 & 3 & m \\ m & 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 3 & -m \\ 2m & 1 & 3 \\ m & 8 & -6 \end{vmatrix} = 15m(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 3 & 2 \\ 2m & 1 & m \\ m & 8 & 5 \end{vmatrix} = 5m(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & -m & 2 \\ 2m & 3 & m \\ m & -6 & 5 \end{vmatrix} = -m(m^2 - 16m + 15) = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = 1, \;\; m = 15$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 3 & -m & 2 \\ 1 & 3 & m \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -8m^2 + 23m - 15 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = \frac{15}{8}$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Problema 2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b) (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 2a & 3a+b \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 2a & 3a+b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$A^2 = 3A + 4I = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = (4A - I)A = 4A^2 - A = 4(4A - I) - A = 15A - 4I$

$$A^3 = 15 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (15A - 4I)A = 15A^2 - 4A = 15(4A - I) - 4A = 56A - 15I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (56A - 15I)A = 56A^2 - 15A = 56(4A - I) - 15A = 209A - 56I$$

$$A^5 = 209 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 56 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153 & 209 \\ 418 & 571 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 \\ 5/3 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 \\ 4/3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & a-b \\ 3c & c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3a+c = 3a \Longrightarrow c = 0 \\ 3b+d = a-b \Longrightarrow d = a-4b \\ -c = 3c \Longrightarrow c = 0 \\ -d = c-d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-4b \end{pmatrix}$.