Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2022) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.

Solución:

a) $|A| = 2(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 3, \quad 2x + y \leq 8, \quad x + 2y \leq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

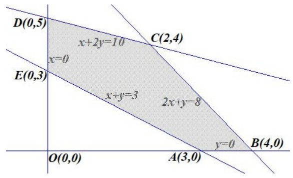
a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

Solución:

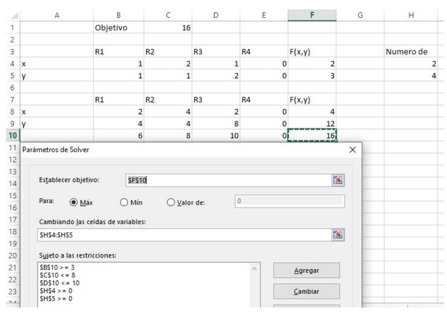
a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(3, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(0, 5)$ y $E(0, 3)$

Solución por solver



b) La función objetivo es $f(x, y) = 2x + 3y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(3,0) = 6 \\ f(4,0) = 8 \\ f(2,4) = 16 \\ f(0,5) = 15 \\ f(0,3) = 9 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C(2, 4)$ con un valor de 16.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 2xf(x)\,dx$

Solución:

a) $x = a = 0 \Longrightarrow b = f(0) = 1$
$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$
$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 1$

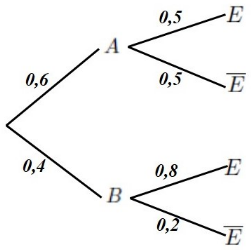
b) $$F(x) = \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int 2x(1+x^2)^{1/2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int 2xt^{1/2}\,\frac{dt}{2x} =$$
$$\int t^{1/2}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + C$$
$$\int_0^1 2xf(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \simeq 1,219$$

Problema 4 *(2 puntos)* Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

b) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

Solución:
Sean A primer restaurante, B segundo restaurante, E ecológica y $\overline{E}$ no ecológica.



a) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) =$
$0,5 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,62$

b) $P(B|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E}|B)P(B)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,4}{1 - 0,62} = 0,2105$

Problema 5 *(2 puntos)* El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0,25 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2,9 horas si $\mu = 2,75$ horas.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2,9388;3,0613) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 0,25)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} \overset{N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(2,75; 0,05)$

$P(\overline{X} \le 2,9) = P\left(Z \le \dfrac{2,9 - 2,75}{0,05}\right) = P(Z \le 3) = 0,9987$

b) $\overline{X} = \dfrac{2,9388 + 3,0613}{2} = 3,00005$ y $2E = 3,0613 - 2,9388 = 0,1225 \Longrightarrow E = 0,06125$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,06125 = z_{\alpha/2}\frac{0,25}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{8 \cdot 0,06125}{0,25} = 1,96$$

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = P(Z \le 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2021) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + az = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = 3(1 - a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \ne 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -2$:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 2x - 3}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

Solución:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.
Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  - En $x = -3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} \dfrac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\dfrac{10}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} \dfrac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\dfrac{10}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

  - En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\dfrac{10}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\dfrac{10}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- ☛ Horizontales: $y = 0$.

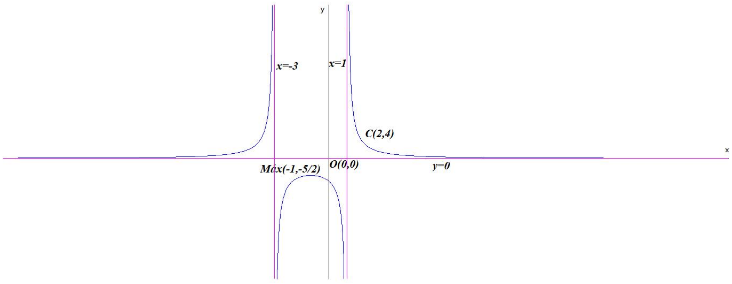
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = 0$$

- ☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{20(x + 1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$, y decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, \infty)$, tiene un máximo relativo en el punto $\left(-1, -\dfrac{5}{2}\right)$.



Problema 3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas.
Estudiamos la continuidad en $x = 2$

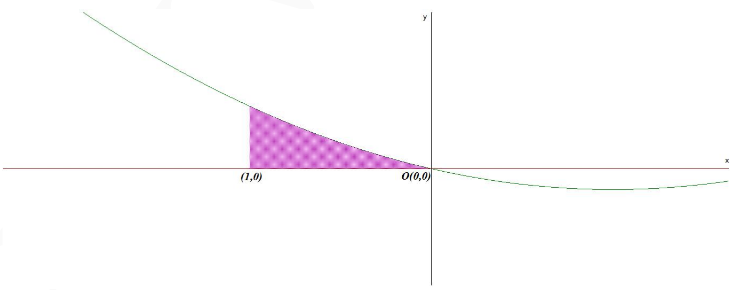
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \left(ax^2 - 2x\right) = 4a - 4 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \ln(x-1) = 0 \\ \\ f(2) = 4a - 4 \end{array} \right. \Longrightarrow 4a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Longrightarrow f$ es continua en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) En esa rama $f(x) = x^2 - 2x$ que corta al eje de abscisas en $x = 0$. Luego el único punto de corte con el eje OX está en la frontera del intervalo $[-1, 0]$.

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{4}{3} \simeq 1{,}3333\ u^2$$



Problema 4 *(2 puntos)* Entre los deportistas profesionales, el 50 % disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30 % está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10 % de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.

b) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

Solución:
Sean B disfruta de beca y E estudia cursos superiores.
$P(B) = 0,5$, $P(E) = 0,3$ y $P(B \cap E) = 0,1$

a) $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7$

b) $P(\overline{B}|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(\overline{B \cup E})}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - P(B \cup E)}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - 0,7}{1 - 0,3} = 0,4286$

Problema 5 *(2 puntos)* Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 90 % para estimar μ.

b) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$$N(\mu; 6)$$

a) Tenemos $\overline{X} = 44$, $n = 81$ y $NC = 90\,\%$
$NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{6}{\sqrt{81}} = 1,0967$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (44 - 1,0967; 44 + 1,0967) = (42,9033; 45,0967)$$

b) $E = \dfrac{3}{2} = 1,5$ y $NC = 95\,\%$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{6}{\sqrt{n}} = 1,5 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 6}{1,5}\right)^2 = 61,4656$$

Luego $n = 62$.