Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente 2022) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $B = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A(A^2 - A^4)$

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A+aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^3 \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A^3 = A$

$A(A^2 - A^4) = A^3 - A^5 = A - A = O$

b) $|B| = a(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = \pm 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$

$|AB| = |A||B| = 0 \cdot |B| = 0 \Longrightarrow$ la matriz AB no es invertible, independientemente del valor de a.

En conclusión, no hay valores de a que hagan invertibles a las dos matrices.

Problema 2 *(2 puntos)* Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Sólo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 € y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

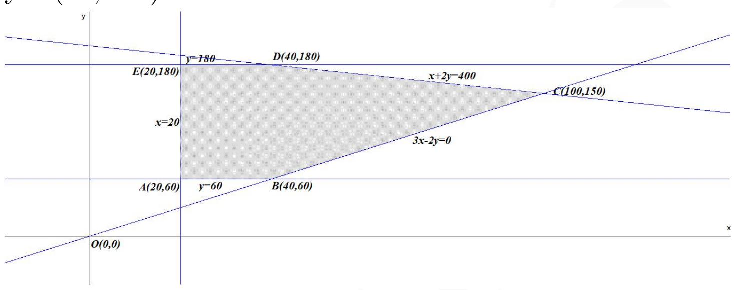
Solución:

Sean x el número de sacos de 5 kg e y el número sacos de 10 kg.

La función objetivo es $f(x,y) = 2x + 5y$ sujeta a las restricciones (región factible):

$$S: \begin{cases} y \le 180 \\ 5x + 10y \le 2000 \\ 2y \ge 3x \\ x \ge 20 \\ y \ge 60 \end{cases} \Longrightarrow S: \begin{cases} y \le 180 \\ x + 2y \le 400 \\ 3x - 2y \le 0 \\ x \ge 20 \\ y \ge 60 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(20,60)$, $B(40,60)$, $C(100,150)$, $D(40,180)$ y $E(20,180)$



$$f(x,y) = 2x + 5y \text{ en } S: \begin{cases} f(20,60) = 340 \\ f(40,60) = 380 \\ f(100,150) = 950 \\ f(40,180) = 980 \\ f(20,180) = 940 \end{cases}$$

El beneficio máximo será de 980 € y se alcanza con la venta de 40 sacos de 5 kg y 180 de 10 kg.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ x + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^{0} f(x)\, dx$$

Solución:

a) Las tres ramas son continuas, habrá que estudiar la continuidad en $x=-2$ y $x=1$.
En $x=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (2x-a) = -4-a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 = 4 \\ f(-2)=4 \end{array}\right. \Longrightarrow -4-a=4 \Longrightarrow a=-8$$

En $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+b) = 1+b \\ f(1)=1 \end{array}\right. \Longrightarrow 1=1+b \Longrightarrow b=0$$

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 2x+8 & \text{si} & x<-2 \\ x^2 & \text{si} & -2\le x\le 1 \\ x-8 & \text{si} & x>1 \end{array}\right.$ $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} (2x+8)\,dx + \int_{-2}^{0} x^2\,dx = x^2+8x\Big]_{-3}^{-2} + \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{0} =$
$4-16-(9-24)+0+\dfrac{8}{3} = \dfrac{17}{3}$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B)=1/2$.

a) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A\cup B)=3/4$.

b) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A\cap B^c)=1/4$.
Nota: B^c denota el suceso complementario de B.

Solución:

a) A y B sucesos independientes $\Longrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\Longrightarrow$
$\dfrac{3}{4}=P(A)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}P(A)\Longrightarrow \dfrac{1}{2}P(A)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\Longrightarrow P(A)=\dfrac{1}{2}$

b) $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)\Longrightarrow \dfrac{1}{4}=P(A)-\dfrac{1}{2}P(A)\Longrightarrow \dfrac{1}{2}P(A)=\dfrac{1}{4}\Longrightarrow P(A)=\dfrac{1}{2}$

Problema 5 *(2 puntos)* Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

a) Si la proporción poblacional fuese $P = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 6 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de familias que tienen internet.

Solución:

a) $p = 0,8 \Longrightarrow q = 1 - p = 0,2$
$NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,575\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{n}} = 0,06$$

$$n \ge \frac{2,575^2 \cdot 0,8 \cdot 0,2}{0,06^2} = 294,694 \Longrightarrow n = 295$$

b) $n = 200$ y $p = \dfrac{170}{200} = 0,85 \Longrightarrow q = 1 - 0,85 = 0,15$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,85 \cdot 0,15}{200}} = 0,04949$$

$$IC = (p - E, p + E) = (0,85 - 0,04949; 0,85 + 0,04949) =$$
$$(0,80051, 0,89949) = (80,051\,\%; 89,949\,\%)$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente 2022) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2ax + z = 1 \\ ax - y + z = 0 \\ ay + z = a + 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a+1 \end{array} \right) \quad |A| = -a(a+2) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 0, \quad a = -2$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\; F_1 = F_3 \; \right] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = -2$:

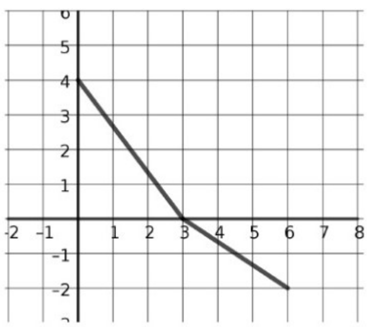
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ -y + z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* La siguiente figura representa la gráfica de una función lineal a trozos $f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$



a) Determine razonadamente el valor de la integral definida $\int_0^3 f(x)\,dx$

b) ¿Cuál número es mayor, $\int_0^3 f(x)\,dx$ o $\int_0^6 f(x)\,dx$? Razone tu respuesta.

Solución:

a) $\int_0^3 f(x)\,dx = \left[S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}\right] = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$

b) $\int_3^6 f(x)\,dx = -\frac{3\cdot 2}{2} = -3$

$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx = 6 - 3 = 3$

Luego $\int_0^3 f(x)\,dx > \int_0^6 f(x)\,dx$

Problema 3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

a) Obtenga el valor de la constante K para que la recta tangente a la función en $x=9$ sea paralela al eje de las x. Indique la expresión de dicha recta.

b) Para $K=3$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y clasifique los extremos relativos de esta función.

Solución:

a) La pendiente de esta tangente $m = f'(9) = 0$.

$f'(x) = \frac{x^2(x-3k)}{(x-k)^3} \Longrightarrow f'(9) = \frac{243(k-3)}{(k-9)^3} = 0 \Longrightarrow K = 3$

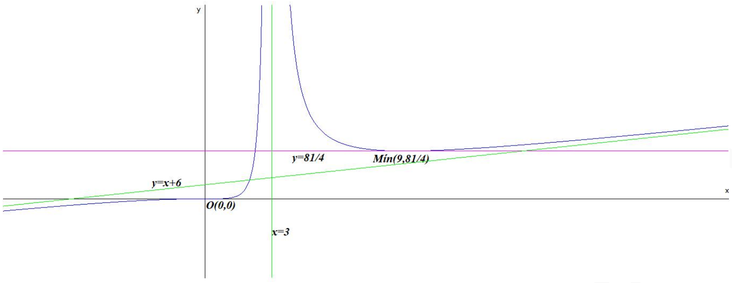
Para $K = 3 \Longrightarrow f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2} \Longrightarrow f(9) = \frac{81}{4}$

La recta horizontal es $y = \frac{81}{4}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x^2(x-9)}{(x-3)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 9$

	$(-\infty, 0)$	$(0,3)$	$(3,9)$	$(9,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (9, \infty)$ y decreciente en el $(3, 9)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $\left(9, \dfrac{81}{4}\right)$.



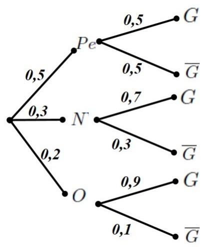
Problema 4 *(2 puntos)* Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50 % de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30 % no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0,5, de que ganen los segundos es 0,7 y de que ganen los últimos es 0,9.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

Solución:

Sean P_e a se sienten perdedores, N no lo ve claro, O son optimistas y G gana el juego.



a) $P(G) = P(G|Pe)P(Pe) + P(G|N)P(N) + P(G|O)P(O) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 = 0,64$

b) $P(Pe|G) = \dfrac{P(G|Pe)P(Pe)}{P(G)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,5}{0,64} = 0,390625$

Problema 5 *(2 puntos)* Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?

b) Calcule $P(19 < \overline{X} < 22)$.

Solución:

$$N(20,5)$$

a) $\overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(20;1)$

b) $P(19 < \overline{X} < 22) = P\left(\dfrac{19-20}{1} < Z < \dfrac{22-20}{1}\right) = P(-1 < Z < 2) =$
$P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1)) =$
$P(Z < 2) + P(Z < 1) - 1 = 0,9772 + 0,8413 - 1 = 0,8185$