Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-coincidente 2022) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

b) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A-B)X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = a(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$
$\exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) Si $a = 1$:

$$A-B = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow 1 - a = 2 \Longrightarrow a = -1$$

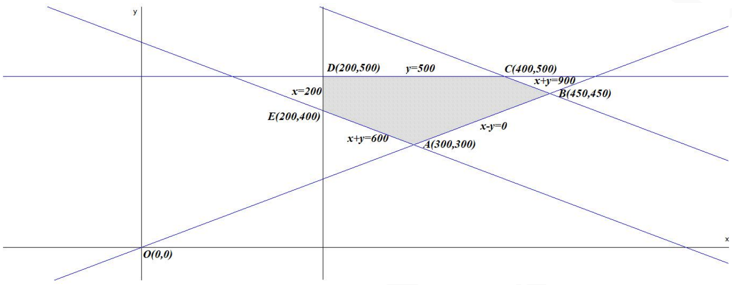
Problema 2 *(2 puntos)* La plataforma digital *Plusfix* va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos, debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene 15€ de beneficio por cada minuto de emisión de cine y 10€ de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.

Solución:

Sean x el tiempo de cine e y el tiempo de deporte.

- ☛

$$S:\left\{\begin{array}{l} x\le y\\ 600\le x+y\le 900\\ x\ge 200\\ y\le 500\\ y\ge 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y\le 0\\ x+y\le 900\\ x+y\ge 600\\ x\ge 200\\ y\le 500\\ y\ge 0\end{array}\right.$$



Los vértices a estudiar serán: $A(300,300)$, $B(450,450)$, $C(400,500)$, $D(200,500)$ y $E(200,400)$.

- ☛ $f(x,y)=15x+10y$ en S:

$$\left\{\begin{array}{l} f(300,300)=7500\\ f(450,450)=11250\\ f(400,500)=11000\\ f(200,500)=8000\\ f(200,400)=7000\end{array}\right. \Longrightarrow$$

El beneficio máximo de la propuesta se obtiene con 450 minutos de cine y 450 minutos de deporte y es de 11250€.

Problema 3 *(2 puntos)*

a) Halle $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx$

b) Considere $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+5}$ y $g(x)=\ln x$

Halle la derivada de la función compuesta $f\circ g(x)$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x}{2x^2+5}\,dx=\frac{1}{4}\ln|2x^2+5|\Big]_0^1=$

$\displaystyle\frac{1}{4}(\ln 7-\ln 5)=\frac{1}{4}\ln\frac{7}{5}\simeq 0,08412$

b) Por la regla de la cadena $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
$f'(x) = -\dfrac{2x^2-5}{(2x^2+5)^2} \Longrightarrow f'(g(x)) = -\dfrac{2(\ln x)^2-5}{(2(\ln x)^2+5)^2}$
$g'(x) = \dfrac{1}{x}$
$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\dfrac{2(\ln x)^2-5}{(2(\ln x)^2+5)^2}\cdot\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2(\ln x)^2-5}{x(2(\ln x)^2+5)^2}$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que $P(A) = 0,7$, $P(B^c) = 0,7$ y $P(A\cap B) = 0,2$.

a) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

b) Calcule $P(A^c\cap B^c)$.
Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A\cap B) = 0,2$ y $P(A)P(B) = 0,7(1-0,7) = 0,21 \Longrightarrow$
$P(A\cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow$ A y B no son independientes.

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) =$
$1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) = 1 - (0,7+0,3-0,2) = 0,2$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z\le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4,3827$
$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (200-4,3827; 200+4,3827) = (195,6173; 204,3827)$

b) $NC = 0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,645\dfrac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{16,45}{0,5}\right)^2 = 1082,41 \Longrightarrow$
$n = 1083$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-coincidente 2022) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ ax - z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

a) Determine a para que el sistema NO sea compatible determinado.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{array}\right); \quad |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 1$$

Estos valores son los únicos que hacen a este sistema NO compatible determinado.

b)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-a)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea una función continua en su dominio.

b) Para $a = 1/2$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de las x.

Solución:

a) Las ramas son continuas, son polinomios, hay que calcular a en $x = 1$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 - 1) = a - 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-a)^2 = (1-a)^2 \\ f(1) = a - 1 \end{cases} \Longrightarrow a - 1 = (1-a)^2 \Longrightarrow$$
$a = 1$ y $a = 2$. Con cualquiera de estos valores la función f es continua en el dominio de la función.

b) Si $a = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

En la rama $x \le 1$ es $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1$

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{2} - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ la solución positiva no es válida está fuera del intervalo, luego el punto de corte es $(-\sqrt{2}, 0)$

En la rama $x > 1$ es $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ la solución no es válida está fuera del intervalo.

Problema 3 *(2 puntos)* Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingesta de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, t (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:
$$f(t) = 90 + Ct^2e^{-t/5}, \quad 0 \le t \le 60$$

a) Obtenga razonadamente el valor de la constante C sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es $15/e$.

b) Para $C = 3$, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

Solución:

a) $f'(t) = \dfrac{Cte^{-t/5}(10-t)}{5}$, $f'(5) = \dfrac{5C}{e} = \dfrac{15}{e} \Longrightarrow C = 3$

b) Si $C = 3 \Longrightarrow f(t) = 90 + 3t^2e^{-t/5}$ y $f'(t) = \dfrac{3te^{-t/5}(10-t)}{5} = 0 \Longrightarrow$ $t = 10$

	$(0,10)$	$(10,60)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

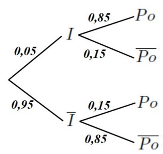
La función es creciente en el intervalo $(0,10)$ y decrece en el $(10,60)$ con un máximo relativo en el punto $(10;130,60)$.
La cantidad de glucosa aumenta hasta los 10 minutos donde alcanza el máximo con 130,60 mg/dl. A partir de este tiempo decrece hasta los 60 minutos.

Problema 4 *(2 puntos)* Un virus muy peligroso está presente en el 5 % de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85 % de los casos. Es decir, entre los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85 % de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85 % de las veces.

a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?

b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?

Solución:
I está infectado, $\overline{I}$ no está infectado, Po el test muestra positivo y $\overline{Po}$ el test muestra positivo.



a) $P(Po) = P(Po|I)P(I) + P(Po|\overline{I})P(\overline{I}) =$
$0,85 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,95 = 0,185$

b) $P(I|Po) = \dfrac{P(Po|I)P(I)}{P(Po)} = \dfrac{0,85 \cdot 0,05}{0,185} = 0,2297$

Problema 5 *(2 puntos)* El 64 % de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa característica de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 70 % de los individuos de la muestra posean dicha característica.

Solución:

a) Se trata de $B(120; 0,64)$, como $n = 120 > 10$, $np = 76,8 > 5$ y $nq = 43,2 > 5$ se puede aproximar mediante una normal $N(np; \sqrt{npq}) = N(76,8; 5,26)$

Como lo que se pide es la distribución de una proporción con $n = 120 > 30$, $np = 76,8 > 5$ y $nq = 43,2 > 5$, sería una normal

$$N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0,64; \sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{120}}\right) = N(0,64; 0,0438)$$

b) $P(X > 0,7) = P\left(Z \geq \dfrac{0,7 - 0,64}{0,0438}\right) = P(Z \geq 1,37) =$
$1 - P(Z \leq 1,37) = 1 - 0,9147 = 0,0853$