Problemas de Matemáticas II
Aplicadas a las ciencias sociales

Programación lineal
(PAU 2019-2020)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

2 de diciembre de 2020

Índice general

0.1. Andalucía 5
0.1.1. Modelo de 2020 5
0.1.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019 5
0.1.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 7
0.2. Aragón 8
0.2.1. Modelo de 2020 8
0.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019 9
0.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 10
0.3. Asturias 11
0.3.1. Modelo de 2020 11
0.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 11
0.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 12
0.4. Cantabria 13
0.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 13
0.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 14
0.5. Castilla La Mancha 15
0.5.1. Modelo de 2020 15
0.5.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 16
0.5.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 17
0.6. Castilla León 18
0.6.1. Modelo de 2020 18
0.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 19
0.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 20
0.7. Cataluña 21
0.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 21
0.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 22
0.8. Comunidad valenciana 23
0.8.1. Modelo de 2020 23
0.8.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 24
0.8.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 24
0.9. Extremadura 25
0.9.1. Modelo de 2020 25
0.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 26
0.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 28
0.10. Galicia 29
0.10.1. Modelo de 2020 29
0.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 30
0.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 31
0.11. Islas Baleares 32

0.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 32
0.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 33
0.12. Islas Canarias 34
0.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 34
0.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 35
0.13. La Rioja 36
0.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 36
0.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 37
0.14. Madrid 38
0.14.1. Modelo de 2020 38
0.14.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 39
0.14.3. Convocatoria junio de 2020 (coincidente) 40
0.14.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 40
0.15. Murcia 41
0.15.1. Modelo de 2020 41
0.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 42
0.15.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 43
0.16. Navarra 44
0.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 44
0.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 45
0.17. País Vasco 47
0.17.1. Modelo de 2020 47
0.17.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 48
0.17.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 49

Problemas

0.1. Andalucía

0.1.1. Modelo de 2020

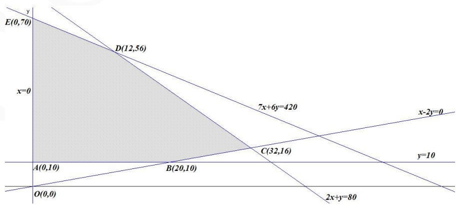
Problema 0.1.1 Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:
LLamamos x : nº de camisetas lisas e y nº de camisetas estampadas.

	algodón	poliéster	Beneficio
camisetas lisas	70	20	5
camisetas estampadas	60	10	4
	≤ 4200	≥ 800	

a) La región factible es:

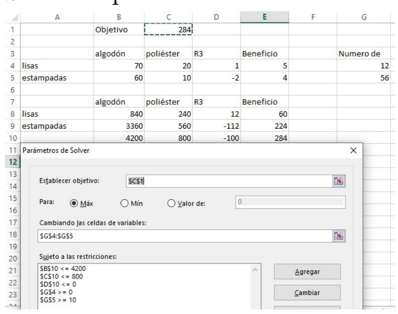
$$\begin{cases} 70x + 60y \leq 4200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ x \leq 2y \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x - 2y \leq 0 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



b) Los vértices son: $A(0,10)$, $B(20,10)$, $C(32,16)$, $D(12,56)$ y $E(0,70)$.
La función objetivo es: $f(x,y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f(0,10) = 40 \\ f(20,10) = 140 \\ f(32,16) = 224 \\ f(12,56) = 284 \text{ Máximo} \\ f(0,70) = 280 \end{cases}$$

Solución por solver:



c) Hay que vender 12 camisetas lisas y 56 estampadas con un beneficio máximo de 284 euros.

0.1.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 0.1.2 Se pide:

a) Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices.

$$x + 2y \geq 7 \quad 4x - y \geq 1 \quad 2x - y \leq 4 \quad 3x + 2y \leq 20 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Solución:

a) LLamamos x : nº de horas que trabaja la cadena A e y nº de horas que trabaja la cadena B.

	lavadoras	frigoríficos	Coste
cadena A	10	5	1200
cadena B	7	6	1500
	≥ 400	≥ 280	

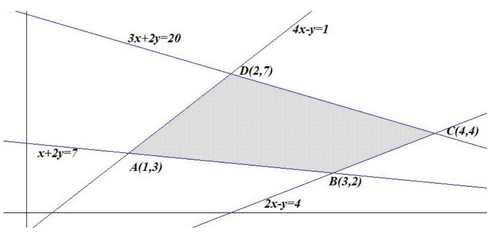
La función objetivo es: $C(x, y) = 1200x + 1500y$, sujeto a:

La región factible es:

$$\begin{cases} 10x + 7y \geq 400 \\ 5x + 6y \geq 280 \\ x \leq 2y \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10x + 7y \geq 400 \\ 5x + 6y \geq 280 \\ x - 2y \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 7 \\ 4x - y \geq 1 \\ 2x - y \leq 4 \\ 3x + 2y \leq 20 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

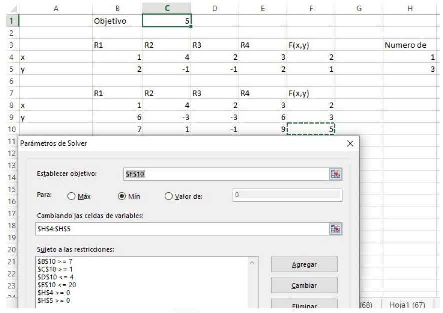


Los vértices son: $A(1, 3)$, $B(3, 2)$, $C(4, 4)$ y $D(2, 7)$.
La función objetivo es: $F(x, y) = 2x + y$

$$\begin{cases} f(1,3) = 5 \text{ Mínimo} \\ f(3,2) = 8 \\ f(4,4) = 12 \\ f(2,7) = 11 \end{cases}$$

El mínimo se obtiene en el punto $A(1,3)$ con un valor de 5.

Solución por solver:



0.1.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 0.1.3 Se pide:

a) Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices.

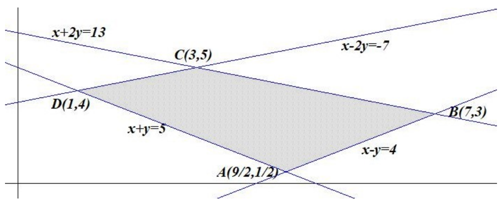
$$x + 2y \leq 13 \;\; x - y \leq 4 \;\; x - 2y \geq -7 \;\; x + y \geq 5$$

b) Calcule los valores máximo y mánimo de la función objetivo $F(x,y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 13 \\ x - y \leq 4 \\ x - 2y \geq -7 \\ x + y \geq 5 \end{cases}$$

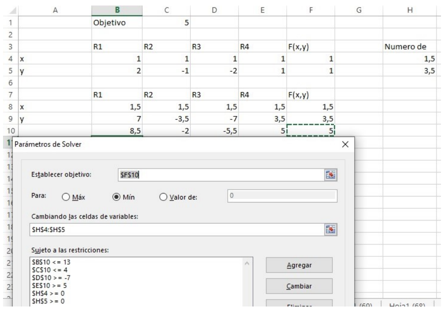


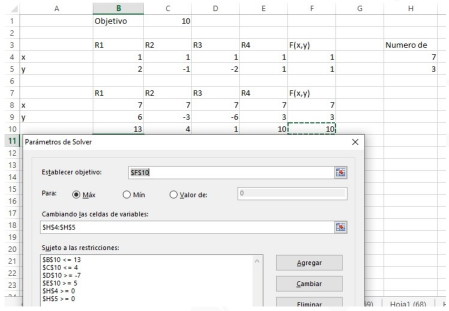
Los vértices son: $A(9/2, 1/2)$, $B(7,3)$, $C(3,5)$ y $D(1,4)$.

b) La función objetivo es: $F(x,y) = x + y$

$$\begin{cases} f(9/2,1/2) = 5 \text{ Mínimo} \\ f(7,3) = 10 \text{ Máximo} \\ f(3,5) = 8 \\ f(1,4) = 5 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $B(7,3)$ con un valor de 10, mientras que el mínimo será cualquier punto del segmento AD con un valor de 5.
Solución por solver:





0.2. Aragón

0.2.1. Modelo de 2020

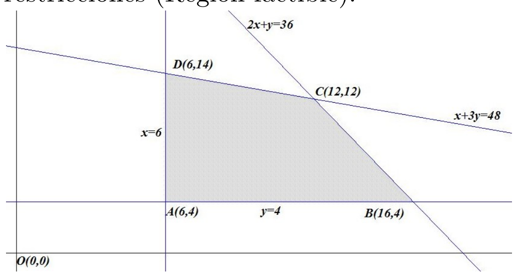
Problema 0.2.1 Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes deben fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Solución:
LLamamos x : nº de sillas e y : nº de taburetes.

	Madera	Tiempo	beneficio
Silla	4	1	70
Taburete	2	3	50
	≤ 72	≤ 48	

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 70x + 50y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} 4x + 2y \leq 72 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 6 \\ y \geq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 36 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 6 \\ y \geq 4 \end{cases}$$



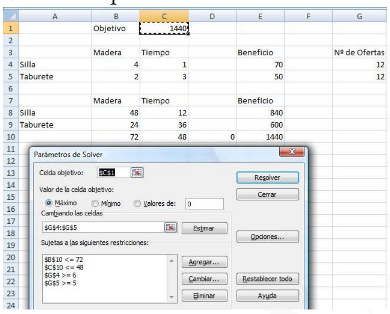
La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6,4)$, $B(16,4)$, $C(12,12)$ y $D(6,14)$.

b) Sustituyendo en la función objetivo:

Solución por solver:

$$\begin{cases} f(6,4) = 620 \\ f(16,4) = 1320 \\ f(12,12) = 1440 \ \text{Máximo} \\ f(6,14) = 1120 \end{cases}$$

El máximo es de 1440 euros y se alcanza cuando se fabrican 12 sillas y 12 taburetes.



0.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

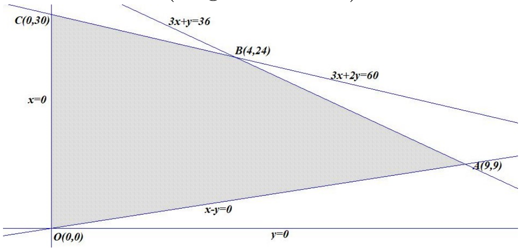
Problema 0.2.2 Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

Solución:
LLamamos x : nº de vestidos de fiesta e y : nº de vestidos de trabajo.

	Tela	Tiempo	beneficio
V. Fiesta	3	6	100
V. Calle	1	4	65
	≤ 36	≤ 120	

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 100x + 65y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

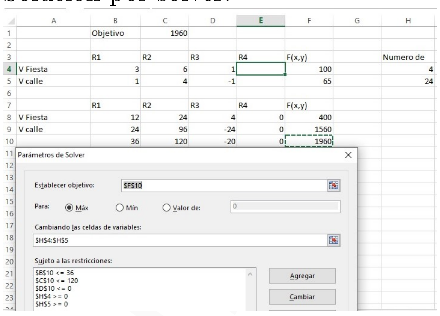
$$S : \begin{cases} 3x + y \leq 36 \\ 6x + 4y \leq 120 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 36 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x - y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(9,9)$, $B(4,24)$ y $C(0,30)$.

b) Sustituyendo en la función objetivo:

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(9,9) = 1485 \\ f(4,24) = 1960 \ \text{Máximo} \\ f(0,30) = 1950 \end{cases}$$

El máximo beneficio es de 1960 euros y se alcanza cuando se confeccionan 4 vestidos de fiesta y 24 de calle.

0.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

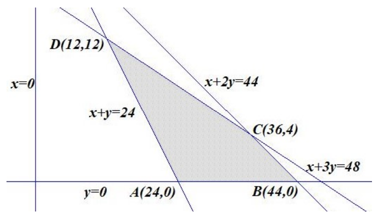
Problema 0.2.3 Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Solución:
LLamamos x : nº de entrenamientos cortos e y : nº de entrenamientos largos.

	Tiempo	Kms	Consumo
E. cortos	1	15	1200
E. largos	3	30	2500
	≤ 48	≤ 660	

$$f(x,y) = 1200x + 2500y$$

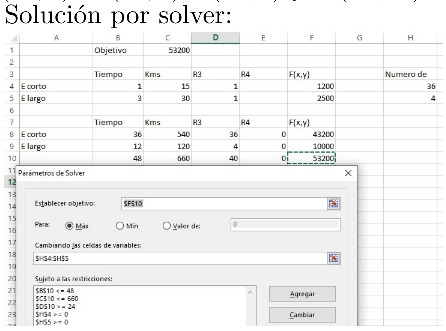
sujeto a



$$\begin{cases} x + y \ge 24 \\ x + 3y \le 48 \\ 15x + 30y \le 660 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \ge 24 \\ x + 3y \le 48 \\ x + 2y \le 44 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

La región factible estaría delimitada por los vértices: $A(24,0)$, $B(44,0)$,$C(36,4)$ y $D(12,12)$.

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(24,0) = 28800 \\ f(44,0) = 52800 \\ f(36,4) = 53200 \ \text{Máximo} \\ f(12,12) = 44400 \end{cases}$$

Se debe de hacer 36 entrenamientos cortos y 4 largos con un consumo máximo de 53200 kilocalorías.

0.3. Asturias

0.3.1. Modelo de 2020

Problema 0.3.1 Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros, y también se exige que los extranjeros sean, por lo menos, un 10 % del total de personas entrevistadas.

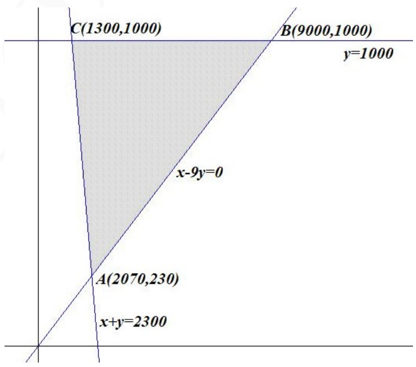
a) ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían ser entrevistados 1000 españoles?

b) Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

Solución:
Llamamos x : nº de españoles entrevistados e y : nº de extranjeros entrevistados.

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y\geq 2300\\ y\leq 1000\\ y\geq 0,1(x+y)\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\geq 2300\\ y\leq 1000\\ x-9y\leq 0\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$



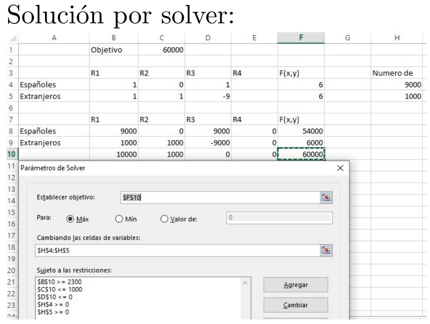
Los vértices son: $A(2070,230)$, $B(9000,1000)$ y $C(1300,1000)$.
Cualquier punto de abscisa inferior a 1300 estaría fuera de la región factible y por tanto no cumpliría todas las condiciones impuestas en el problema.

b) $f(x,y)=6x+6y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2070,230)=13800\\ f(9000,1000)=60000\ \text{Mínimo}\\ f(1300,1000)=13800\end{array}\right.$$

El máximo coste sería de 60000 € lo que se produciría si se encuestan a 9000 españoles y 1000 extranjeros.

Solución por solver:



0.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.3.2 En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

a) ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

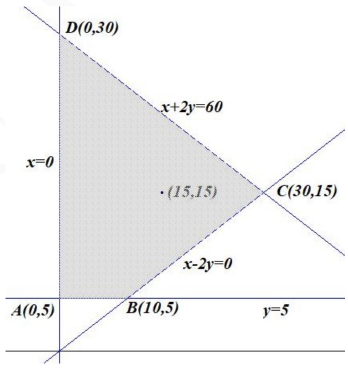
b) Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

Solución:

LLamamos x : nº de mesas altas e y : nº de mesas bajas.

a) La región factible es:

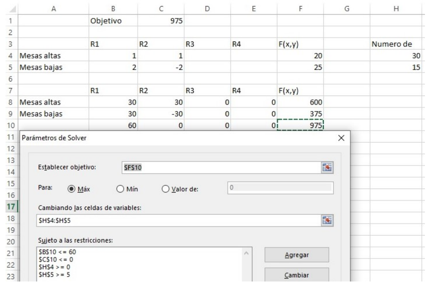
$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ y \geq 5 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 60 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 5 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(0,5)$, $B(10,5)$, $C(30,15)$ y $D(0,30)$. El punto $(15,15)$ está dentro de la región factible y, por tanto, es una posible solución a estas restricciones aunque no sea la óptima.

b) $f(x,y) = 20x + 25y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(0,5) = 125 \\ f(10,5) = 325 \\ f(30,15) = 975 \ \text{Máximo} \\ f(0,30) = 750 \end{cases}$$

El beneficio es máximo si se colocan 30 mesas altas y 15 mesas bajas con un total de 975 €.

0.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.3.3 Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B.

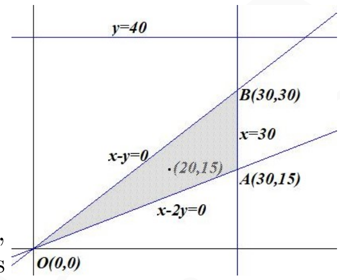
a) ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?

b) Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:
Llamamos x : nº de trabajadores de tipo A e y : nº de trabajadores de tipo B.

a) La región factible es:

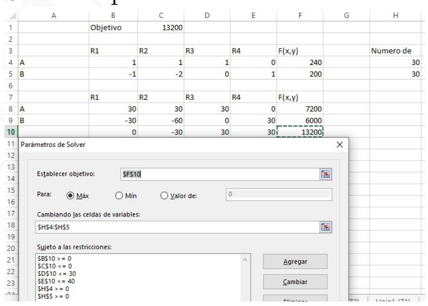
$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $O(0,0)$, $A(30,15)$ y $B(30,30)$.
El punto $(20,15)$ está dentro de la región factible y, por tanto, es una posible solución a estas restricciones aunque no sea la óptima.

b) $f(x,y) = 240x + 200y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30,15) = 10200 \\ f(30,30) = 13200 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

Hay que contratar 30 trabajadores de cada tipo para obtener un beneficio máximo de 13200 €.

0.4. Cantabria

0.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.4.1 Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

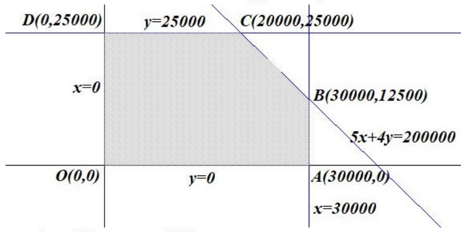
	Zumo de piña	zumo de mango	zumodepapaya
A	$0,5$	$0,5$	
B	$0,4$		$0,6$

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.
Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya.
Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?
Solución:
Llamamos x : nº de bebidas A e y : nº de bebidas B.

	Zumo de piña	zumo de mango	zumodepapaya	venta
A	$0,5$	$0,5$	0	$1,5$
B	$0,4$	0	$0,6$	$1,75$
	≤ 20000	≤ 15000	≤ 15000	

La región factible es:

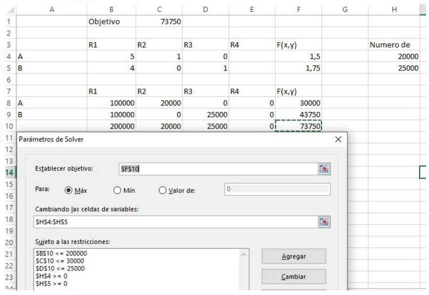
$$\left\{\begin{array}{l} 0,5x+0,4y\leq 20000\\ 0,5x\leq 15000\\ 0,6y\leq 15000\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+4y\leq 200000\\ x\leq 30000\\ y\leq 25000\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$



Los vértices son: $O(0,0), A(30000,0)$, $B(30000,12500)$, $C(20000,25000)$ y $D(0,25000)$.

$f(x,y)=1,5x+1,75y$

Solución por solver:



$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0\\ f(30000,0)=45000\\ f(30000,12500)=66875\\ f(20000,25000)=73750 \text{ Máximo}\\ f(0,25000)=43750\end{array}\right.$$

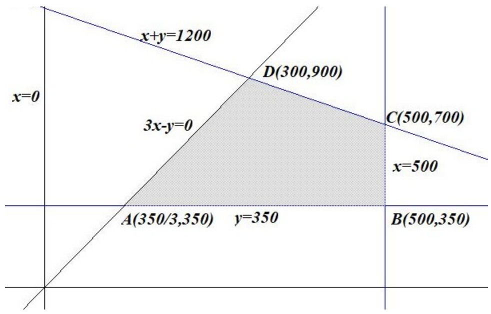
Habría que producir 20000 litros de la bebida A y 25000 de la B con unos ingresos máximos de 73750 €.

0.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.4.2 Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Solución:
Llamamos x : nº de acciones de A e y : nº de acciones de B.
La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y\leq 1200\\ x\leq 500\\ y\geq 350\\ y\leq 3x\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\leq 1200\\ x\leq 500\\ y\geq 350\\ 3x-y\geq 0\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$



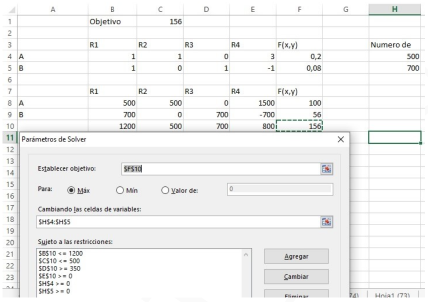
Los vértices son: $A\left(\dfrac{350}{3},350\right)$, $B(500,350)$, $C(500,700)$ y $D(300,900)$.

$f(x,y)=0,2x+0,08y$

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{350}{3}, 350\right) = \dfrac{154}{3} \\ f(500, 350) = 128 \\ f(500, 700) = 156 \ \text{ Máximo} \\ fD(300, 900) = 132 \end{cases}$$

Se deben comprar 500 acciones tipo A y 700 de B con unos beneficios máximos de 156 €.

Solución por solver:



0.5. Castilla La Mancha

0.5.1. Modelo de 2020

Problema 0.5.1 En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias.

Solución:

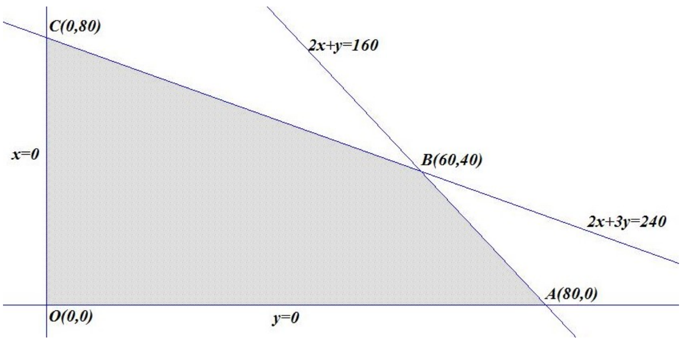
Llamamos x : nº de chaquetas con falda e y : nº de cazadoras con pantalón.

	T_1	T_2	Venta
Chaquetas	2	2	250
Cazadoras	1	3	350
	≤ 160	≤ 240	

a) La función objetivo es: $f(x, y) = 250x + 350y$

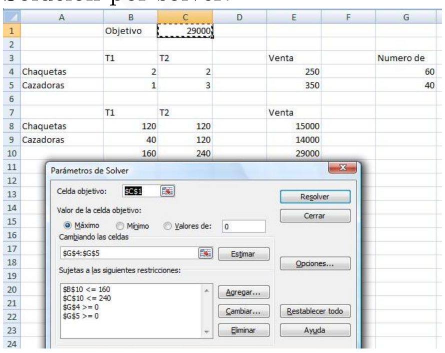
b) La región factible es:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



c) Los vértices son: $A(80,0)$, $B(60,40)$ y $C(0,80)$.

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(80,0) = 20000 \\ f(60,40) = 29000 \text{ Máximo} \\ f(0,80) = 28000 \end{cases}$$

De chaquetas con faldas tiene que vender 60 y 40 de cazadoras con pantalón con un valor máximo de 29000€.

0.5.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.5.2 En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 6x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2; \;\; x - y \leq 2; \;\; y \leq 1; \;\; x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible.

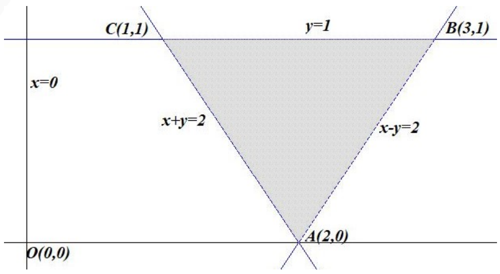
b) Determina los vértices de la región factible.

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



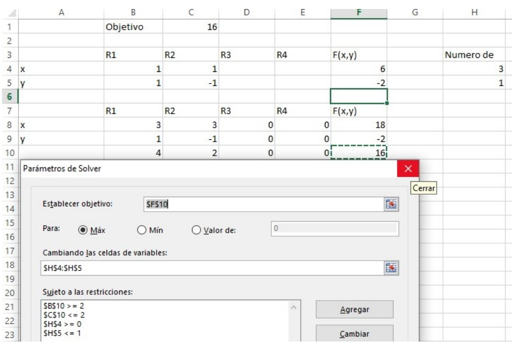
b) Los vértices son: $A(2,0)$, $B(3,1)$ y $C(1,1)$.

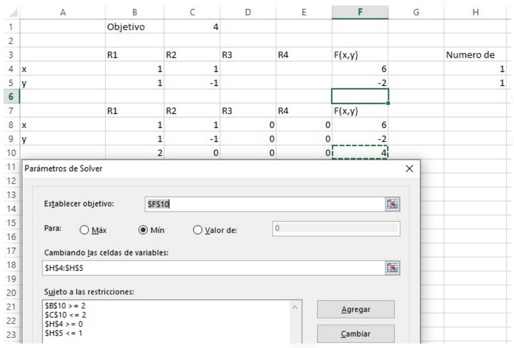
c) $f(x,y) = 6x - 2y$

$$\begin{cases} f(2,0) = 12 \\ f(3,1) = 16 \text{ Máximo} \\ f(1,1) = 4 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $B(3,1)$ con un valor de 16 unidades. El mínimo se encuentra en el punto $C(1,1)$ con un valor de 4 unidades.

Solución por solver:





0.5.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.5.3 Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B. Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

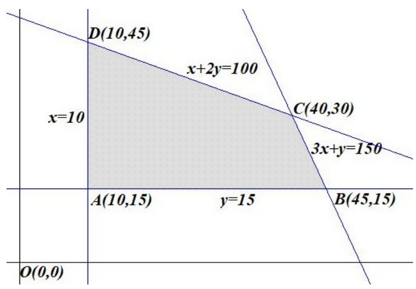
Solución:
Llamamos x : nº de lotes A e y : nº de lotes A.

	Alubias	Garbanzos	Beneficio
A	1	3	3
B	2	1	2
	≤ 100	≤ 150	

a) La función objetivo es: $f(x, y) = 3x + 2y$

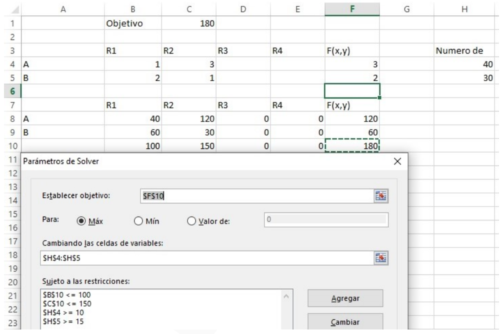
b) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ y \geq 15 \end{cases}$$



c) Los vértices son: $A(10, 15)$, $B(45, 15)$, $C(40, 30)$ y $D(10, 45)$.

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(10,15) = 60 \\ f(45,15) = 165 \\ f(40,30) = 180 \ \text{Máximo} \\ f(10,45) = 120 \end{cases}$$

Hay que vender 40 lotes A y 30 del B con un beneficio máximo de 180 €.

0.6. Castilla León

0.6.1. Modelo de 2020

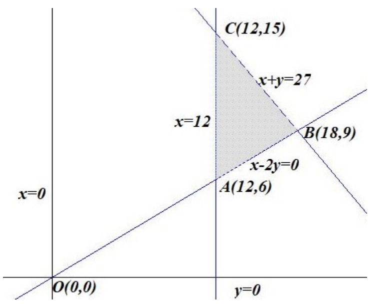
Problema 0.6.1 Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 €, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 €. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

Solución: Llamamos x : nº de camiones con agua e y : nº de camiones con medicinas.

a) La región factible es:

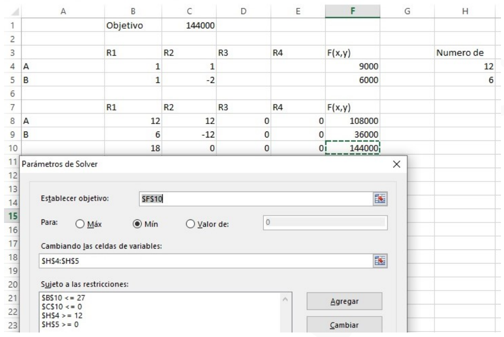
$$\begin{cases} x + y \le 27 \\ x \ge 12 \\ y \ge \frac{x}{2} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 27 \\ x - 2y \le 0 \\ x \ge 12 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(12,6)$, $B(18,9)$ y $C(12,15)$.



b) $f(x,y) = 9000x + 6000y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(12,6) = 144000 \text{ Mínimo} \\ f(18,9) = 216000 \\ f(12,15) = 198000 \end{cases}$$

Se deben mandar 12 camiones con agua y 6 con medicinas con un coste mínimo de 144000 €.

0.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

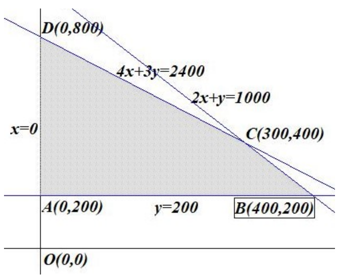
Problema 0.6.2 Una Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 €.
Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

Solución: Llamamos x : nº de televisores LED e y : nº de televisores QLED.

	Horas Electrónica	Horas Montaje	Beneficio
LED	4	2	70
QLED	3	1	50
	≤ 2400	≤ 1000	

a) La región factible es:

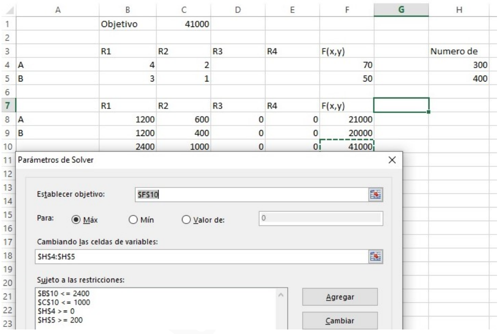
$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 2400 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 200 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(0,200)$, $B(400,200)$, $C(300,400)$ y $D(0,800)$.

b) $f(x,y) = 70x + 50y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(0,200) = 10000 \\ f(400,200) = 38000 \\ f(300,400) = 41000 \ \text{Máximo} \\ f(0,800) = 40000 \end{cases}$$

Se deben fabricar 300 televisiones LED y 400 con QLED con un beneficio máximo de 41000 €.

0.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.6.3 Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B. Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

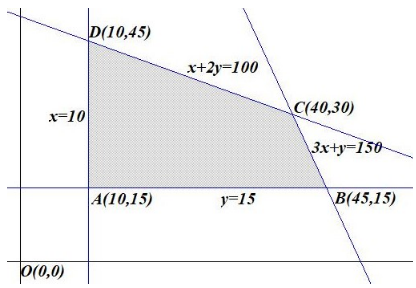
Solución:
Llamamos x : nº de lotes A e y : nº de lotes A.

	Alubias	Garbanzos	Beneficio
A	1	3	3
B	2	1	2
	≤ 100	≤ 150	

a) La función objetivo es: $f(x,y) = 3x + 2y$

b) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ y \geq 15 \end{cases}$$

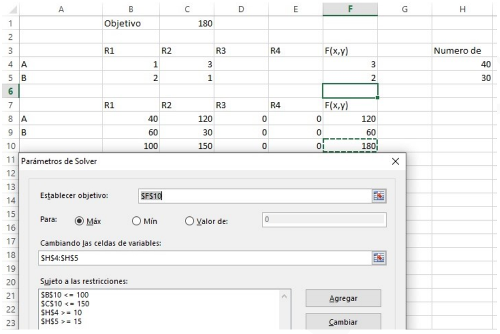


c) Los vértices son: $A(10,15)$, $B(45,15)$, $C(40,30)$ y $D(10,45)$.

$$\begin{cases} f(10,15) = 60 \\ f(45,15) = 165 \\ f(40,30) = 180 \ \text{Máximo} \\ f(10,45) = 120 \end{cases}$$

Hay que vender 40 lotes A y 30 del B con un beneficio máximo de 180 €.

Solución por solver:



0.7. Cataluña

0.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.7.1 Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 € y cada mesa uno de 25 €. Sabemos que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También sabemos que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que debe fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas debe ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.

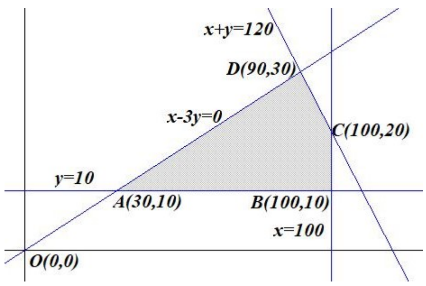
a) Determinar la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida? ¿Cuál es este beneficio?

Solución:
Llamamos x : nº de sillas e y : nº de mesas.

a) La región factible es:

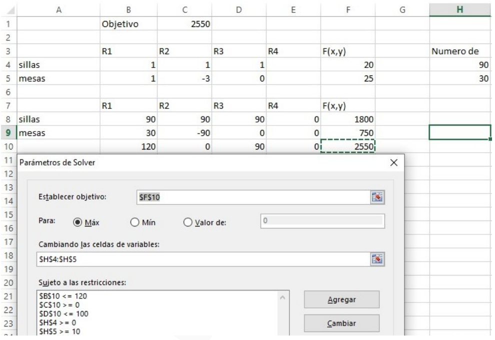
$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \geq 3y \\ x \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 120 \\ x - 3y \geq 0 \\ x \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 10 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(30,10)$, $B(100,10)$, $C(100,20)$ y $D(90,30)$.

b) $f(x,y) = 20x + 25y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(30,10) = 850 \\ f(100,10) = 2250 \\ f(100,20) = 2500 \text{ Máximo} \\ f(90,30) = 2550 \end{cases}$$

Se deben fabricar 100 sillas y 30 mesas con un beneficio máximo de 7000 €.

0.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.7.2 Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en botellas pequeñas cuestan 70 €, y la colonia, que es más diluida y se vende en botellas más grandes a 82 €. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: el ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otros sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y de 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar una botella de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar una de colonia se necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml de el ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

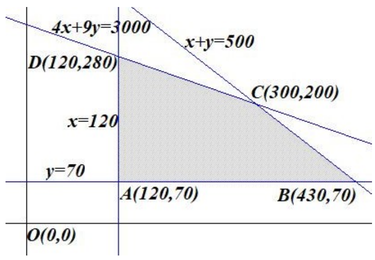
b) Cuántas unidades hay que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, unos ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos?

Solución:
Llamamos x : número de botellas de perfume e y : número de botellas de colonia.

	A	B	Venta
Perfume	10	40	70
Colonia	10	90	82
	≤ 5000	≤ 30000	

a) La región factible es:

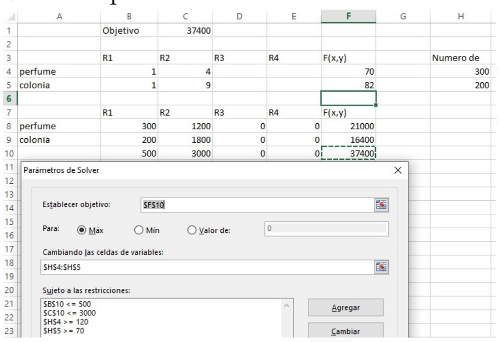
$$\begin{cases} 10x + 10y \leq 5000 \\ 40x + 90y \leq 30000 \\ y \geq 70 \\ x \geq 120 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 500 \\ 4x + 9y \leq 3000 \\ y \geq 70 \\ x \geq 120 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(120,70)$, $B(430,70)$, $C(300,200)$ y $D(120,280)$.

b) La función objetivo es: $f(x,y) = 70x + 82y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(120,70) = 14140 \\ f(430,70) = 35840 \\ f(300,200) = 37400 \text{ Máximo} \\ f(120,280) = 31360 \end{cases}$$

El máximo es de 37400 € y se encuentra vendiendo 300 botellas de perfume y 200 de colonia.

0.8. Comunidad valenciana

0.8.1. Modelo de 2020

Problema 0.8.1 Un inversor dispone de 9000 € y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 € y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7 % y la del producto B del 6,3 %.

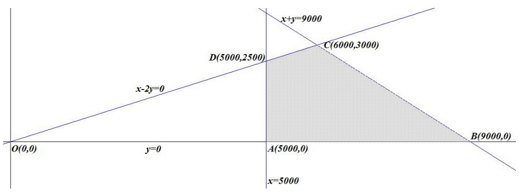
a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Solución:
Llamamos x : cantidad invertida en A e y : cantidad invertida en B.

a) La región factible es:

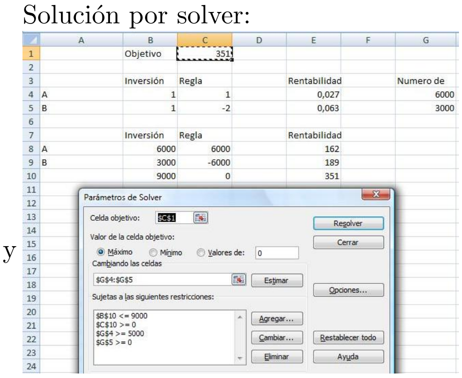
$$\begin{cases} x + y \le 9000 \\ x \ge 2y \\ x \ge 5000 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 9000 \\ x - 2y \ge 0 \\ x \ge 5000 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(5000,0)$, $B(9000,0)$, $C(6000,3000)$ y $D(5000,2500)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 0,027x + 0,063y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(5000,0) = 135 \\ f(9000,0) = 243 \\ f(6000,3000) = 351 \text{ Máximo} \\ f(5000,2500) = 292,5 \end{cases}$$

b) El máximo se encuentra invirtiendo 6000 € en A y 3000 € en B con una rentabilidad de 351 €.

0.8.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.8.2 Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25 % de nitrógeno y un 15 % de fósforo, siendo su precio de 1,2 € el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16 % de nitrógeno y un 40 % de fósforo y cuesta 1,6 € el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo?

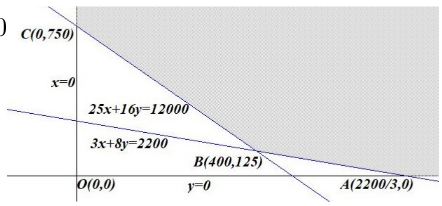
b) ¿Cuál es este coste mínimo?

Solución:
Llamamos x : número de kg del fertilizante A e y : número de kg del fertilizante A.

	N	P	Precio
A	$0,25$	$0,15$	$1,2$
B	$0,16$	$0,40$	$1,6$
	≥ 120	≥ 110	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 0,25x + 0,16y \geq 120 \\ 0,15x + 0,40y \geq 110 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 25x + 16y \leq 1200 \\ 3x + 8y \leq 2200 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\left(\frac{2200}{3}, 0\right)$, $B(400, 125)$ y $C(0, 750)$.

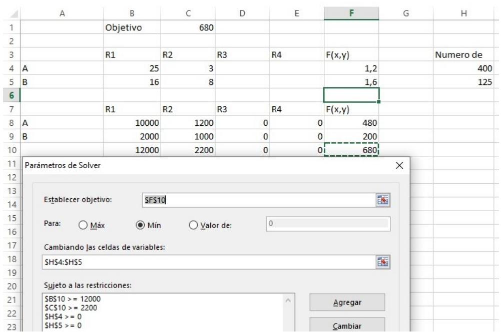
En el siguiente apartado se hacen las conclusiones.

b) La función objetivo es: $f(x, y) = 1,2x + 1,6y$

$$\begin{cases} f\left(\frac{2200}{3}, 0\right) = 880 \\ f(400, 125) = 680 \text{ Mínimo} \\ f(0, 750) = 1200 \end{cases}$$

El coste mínimo es de 680 € y se encuentra comprando 400 kg de fertilizante A y 125 kg del B.

Solución por solver:



0.8.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

No hubo problemas de este tipo en el examen de la PAU.

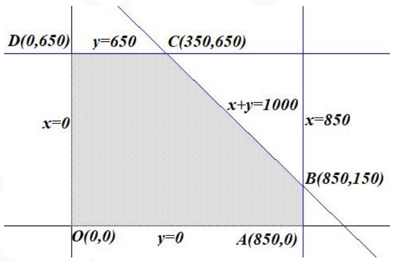
0.9. Extremadura

0.9.1. Modelo de 2020

Problema 0.9.1 Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero, ¿cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.
Solución:
Llamamos x : número de trajes de señora e y : número de trajes de caballero.

La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x \leq 850 \\ y \leq 650 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



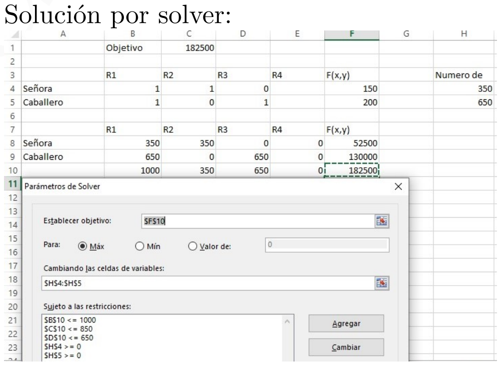
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(850,0)$, $B(850,150)$, $C(350,650)$, $D(0,650)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 150x + 200y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(850,0) = 127500 \\ f(850,150) = 157500 \\ f(350,650) = 182500 \text{ Máximo} \\ f(0,650) = 130000 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 182500 € y se encuentra confeccionando 350 trajes de señora y 650 de caballero.

Solución por solver:

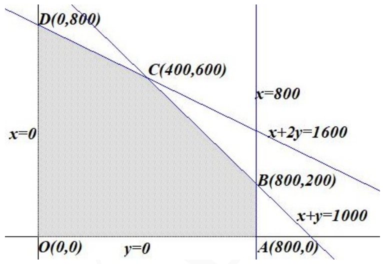


Problema 0.9.2 Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A le produce un beneficio de 30 euros y cada lote B 40 euros. Sabiendo que tiene a la venta como máximo 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, determinar la región factible y los posibles puntos solución del problema para que se obtengan los máximos beneficios. Justificar la respuesta.
Solución:
Llamamos x : número de lotes A e y : número de lotes B.

	limonero	naranjo	manzano	Beneficio
A	1	1	1	30
B	2	0	1	40
	≤ 1600	≤ 800	≤ 1000	

La región factible es:

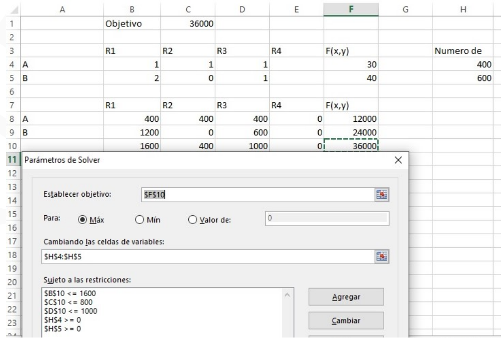
$$\begin{cases} x + 2y \leq 1600 \\ x \leq 800 \\ x + y \leq 1000 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $O(0,0)$, $A\,(800,0)$, $B(800,200)$, $C(400,600)$, $D(0,800)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 30x + 40y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(800,0) = 24000 \\ f(800,200) = 32000 \\ f(400,600) = 36000 \ \text{Máximo} \\ f(0,800) = 32000 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 36000 € y se llega vendiendo 400 lotes A y 600 lotes B.

0.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.9.3 Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

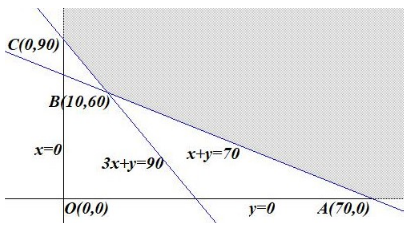
Solución:

Llamamos x : número de automóviles de la fábrica A en un día e y : número de automóviles de la fábrica B en un día.

	Turismos	Furgonetas	Coste
A	6	2	30000
B	2	2	20000
	≥ 180	≥ 140	

La región factible es:

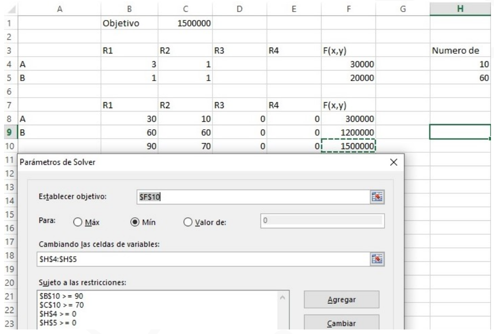
$$\begin{cases} 6x + 2y \geq 180 \\ 2x + 2y \geq 140 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \geq 90 \\ x + y \geq 70 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\,(70,0)$, $B(10,60)$ y $C(0,90)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 30000x + 20000y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(70,0) = 2100000 \\ f(10,60) = 1500000 \ \text{Mínimo} \\ f(0,90) = 1800000 \end{cases}$$

El coste mínimo es de 1500000 € y se llega vendiendo 10 días de trabajo de la fábrica A y 60 de la B.

Problema 0.9.4 Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

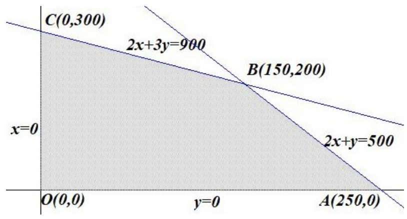
Solución:

Llamamos x : número de lotes A e y : número de lotes B.

	Miel	Polen	Beneficio
A	2	2	15
B	3	1	12
	≤ 900	≤ 500	

La región factible es:

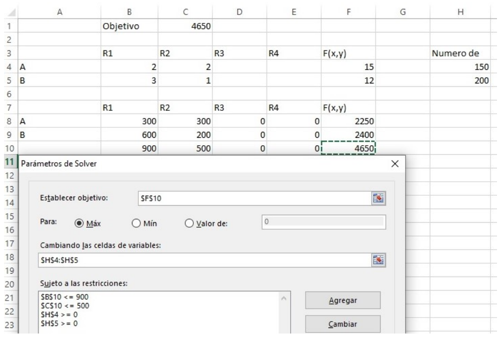
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 900 \\ 2x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(250,0)$, $B(150,200)$ y $C(0,300)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 15x + 12y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(250,0) = 3750 \\ f(150,200) = 4650 \ \text{Máximo} \\ f(0,300) = 3600 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 4650 € y se llega vendiendo 150 lotes de A y 200 del B.

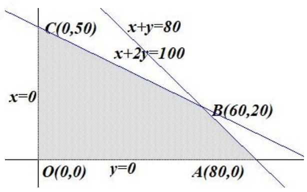
0.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 0.9.5 Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuesto A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.
Solución:
Llamamos x : número de envases A e y : número de envases B.

	N	K	Beneficio
A	3	1	100
B	6	1	120
	≤ 300	≤ 80	

La región factible es:

$$\begin{cases} 3x+6y\le 300 \\ x+y\le 80 \\ y\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y\le 100 \\ x+y\le 80 \\ y\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$$



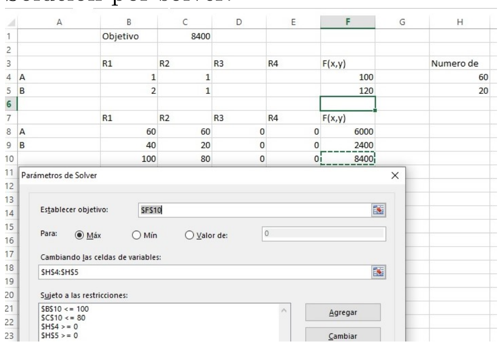
Los vértices son: $A\,(80,0)$, $B(60,20)$ y $C(0,50)$.

La función objetivo es: $f(x,y)=100x+120y$

$$\begin{cases} f(80,0)=8000 \\ f(60,20)=8400 \ \text{Máximo} \\ f(0,50)=6000 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 8400 € y se llega vendiendo 60 envases de A y 20 del B.

Solución por solver:



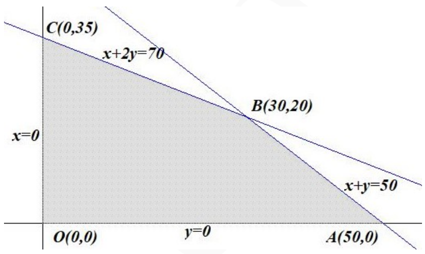
Problema 0.9.6 Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0,5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de piel, siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel. ¿Cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.
Solución:

Llamamos x : número de pares de zapatos A e y : número de pares de botas B.

	Horas	m^2	Beneficio
Zapatos	1	0,5	70
Botas	1	1	80
	≤ 50	≤ 35	

La región factible es:

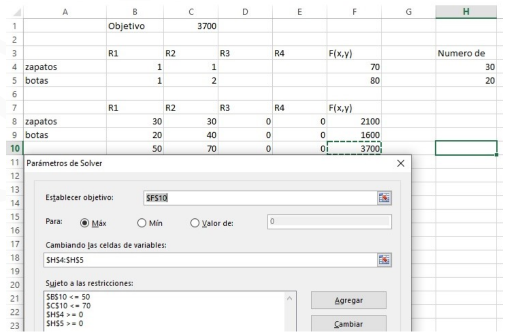
$$\begin{cases} x+y\leq 50 \\ 0,5x+y\leq 35 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y\leq 50 \\ x+2y\leq 70 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\,(50,0)$, $B(30,20)$ y $C(0,35)$.

La función objetivo es: $f(x,y)=70x+80y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(50,0)=3500 \\ f(30,20)=3700 \text{ Máximo} \\ f(0,35)=2800 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 3700 € y se llega fabricando 30 pares de zapatos y 20 pares de botas.

0.10. Galicia

0.10.1. Modelo de 2020

Problema 0.10.1 Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 euros; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.

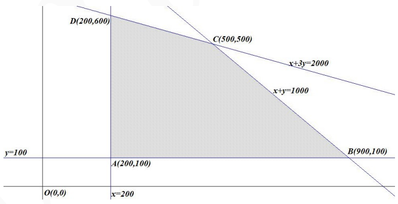
b) Representa la región factible.

c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución:
Llamamos x : nº de lotes de la oferta 1 e y : nº de lotes de la oferta 2.

	camisetas	chandal	Venta
$OF1$	1	1	30
$OF2$	3	1	50
	≤ 2000	≤ 1000	

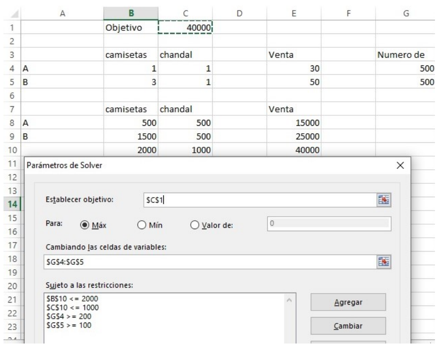
a) La región factible es:



$$\begin{cases} x + 3y \leq 2000 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(200,100)$, $B(900,100)$, $C(500,500)$ y $D(200,600)$.

Solución por solver :



b) La función objetivo es: $f(x,y) = 30x + 50y$

$$\begin{cases} f(200,100) = 11000 \\ f(900,100) = 32000 \\ f(500,500) = 40000 \text{ Máximo} \\ f(200,600) = 36000 \end{cases}$$

Del lote 1 hay que vender 500 y del lote 2 otros 500 con un valor de venta máximo de 40000 euros.

0.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.10.2 Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

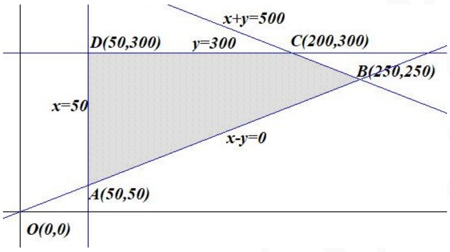
a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

b) Represente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 € y por cada foco del modelo B es de 40 €, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Solución:
Llamamos x : número de focos modelo A e y : número de focos modelo B.

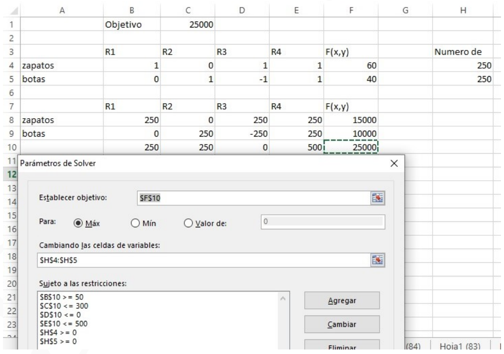
a) La región factible es:



$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ x - y \leq 0 \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

b) Los vértices son: $A(50, 50)$, $B(250, 250)$, $C(200, 300)$ y $D(50, 300)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x, y) = 60x + 40y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(50, 50) = 5000 \\ f(250, 250) = 25000 \text{ Máximo} \\ f(200, 300) = 24000 \\ f(50, 300) = 15000 \end{array}\right.$$

El beneficio máximo es de 25000 € y se llega fabricando 250 focos modelo A y 250 focos modelo B.

0.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.10.3 El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

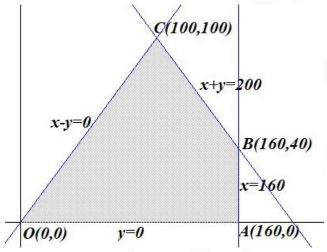
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Solución:
Llamamos x : número de habitaciones tipo A e y : número de habitaciones tipo B.

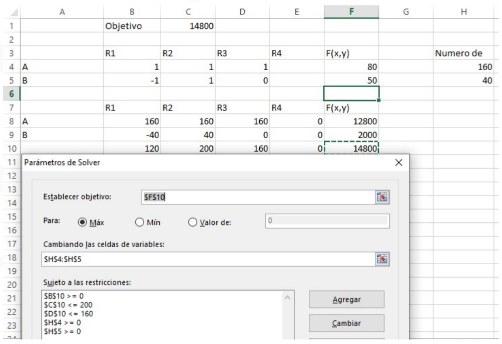
a) La región factible es:

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 200 \\ x \leq 160 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(160,0)$, $B(160,40)$ y $C(100,100)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x,y) = 80x + 50y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(160,0) = 12800 \\ f(160,40) = 14800 \ \text{Máximo} \\ f(100,100) = 13000 \end{cases}$$

El coste máximo es de 14800 € y se llega contratando 160 habitaciones tipo A y 40 tipo B.

0.11. Islas Baleares

0.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.11.1 Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para hacer una hornada de pasteles del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para hacer una hornada de pasteles del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Se sabe que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 € y de 30 € en vender una hornada del tipo B.

a) Plantear la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal.

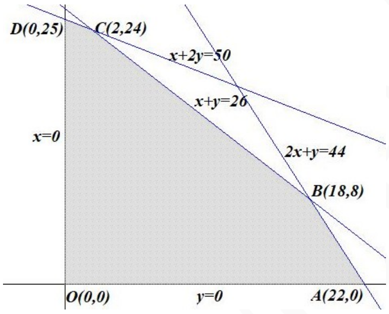
b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Determinar cuántas hornadas de cada tipo tiene que hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:
Llamamos x : nº de pasteles tipo A e y : nº de pasteles tipo B.

	Harina	Azúcar	Mantequilla	Beneficio
A	3	1	1	20
B	6	$0,5$	1	30
	≤ 150	≤ 22	≤ 26	

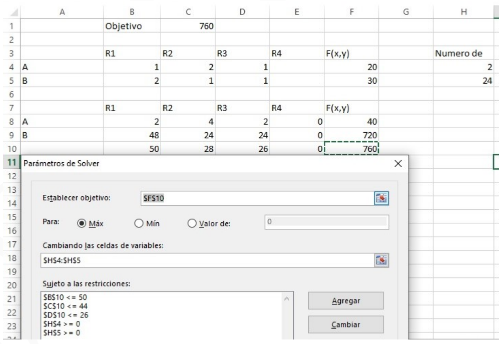
a) La región factible es:



$$\begin{cases} 3x + 6y \leq 150 \\ x + 0,5y \leq 22 \\ x + y \leq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 44 \\ x + y \leq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(22,0)$, $B(18,8)$, $C(2,24)$ y $D(0,25)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x, y) = 20x + 30y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(22,0) = 440 \\ f(18,8) = 600 \\ f(2,24) = 760 \text{ Máximo} \\ f(0,25) = 750 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 760 € y se llega horneando 2 pasteles tipo A y 24 del tipo B.

0.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.11.2 Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 € de beneficio por unidad.

a) Plantear la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal.

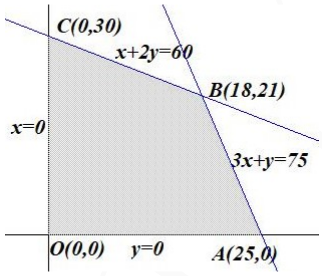
b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Sabiendo que se venderán toda la producción, Determinar cuántos anillos de cada modelo hay que producir para obtener el máximo beneficio y indique cuál es este beneficio.

Solución:
Llamamos x : nº de anillos tipo A e y : nº de anillos tipo B.

	Plata	Horas	Beneficio
A	6	3	35
B	2	6	55
	150	180	

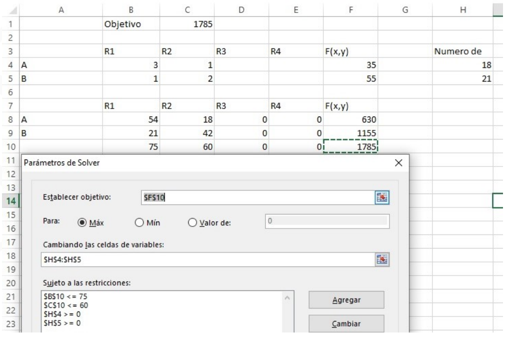
a) La región factible es:



$$\begin{cases} 6x+2y \le 150 \\ 3x+6y \le 180 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+y \le 75 \\ x+2y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(25,0)$, $B(18,21)$ y $C(0,30)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x,y) = 35x + 55y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(25,0) = 875 \\ f(18,21) = 1785 \ \text{Máximo} \\ f(0,30) = 1650 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 1785 € y se llega fabricando 18 anillos tipo A y 21 del tipo B.

0.12. Islas Canarias

0.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.12.1 En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

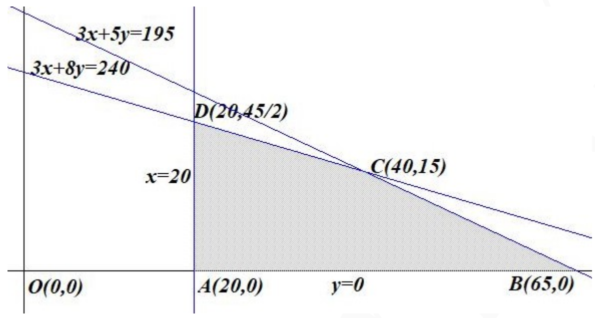
Solución: Llamamos x : nº de cajas tipo A e y : nº de cajas tipo B.

	Fruta	Verdura	Precio de venta
A	3	3	10
B	5	8	18
	≤ 195	≤ 240	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 3x+5y \le 195 \\ 3x+8y \le 240 \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(20,0)$, $B(65,0)$, $C(40,15)$ y $D\left(20,\frac{45}{2}\right)$.

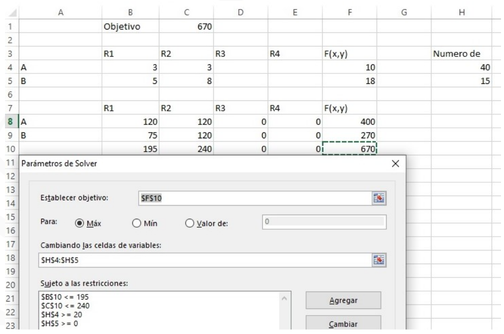


b) $f(x,y) = 10x + 18y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(20,0) = 200 \\ f(65,0) = 650 \\ f(40,15) = 670 \ \text{Máximo} \\ f\left(20,\frac{45}{2}\right) = 605 \end{cases}$$

Se deben vender 40 cajas tipo A y 15 cajas tipo B por un valor máximo de 670 €.



0.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.12.2 Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5400 € y no precisa más de 20 unidades.

a) Representar la región factible y los vértices.

b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99€ por la venta de cada gabardina de paño y 156€ por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

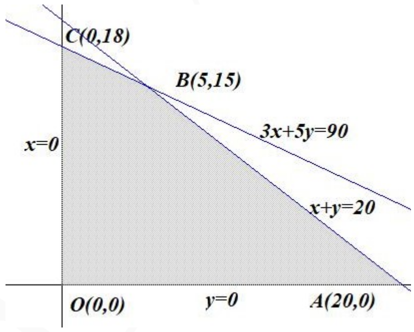
Solución:

Llamamos x : nº de gabardinas de paño e y : nº de gabardinas de piel.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 180x + 300y \leq 5400 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 5y \leq 90 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $O(0,0)$, $A(20,0)$, $B(5,15)$ y $C(0,18)$.

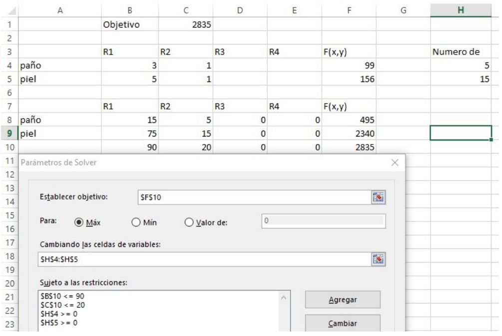


b) $f(x,y) = 99x + 156y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(20,0) = 1980 \\ f(5,15) = 2835 \text{ Máximo} \\ f(0,18) = 2808 \end{cases}$$

Se deben comprar 5 gabardinas de paño y 15 de piel con un beneficio máximo de 2835 €.



0.13. La Rioja

0.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.13.1 Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x,y) = x + y + 1$ pero esta sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8; \quad 3x - 2y \leq 12; \quad x + 5y \leq 21; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones.

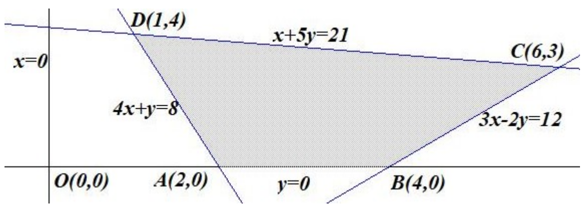
b) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 4x + y \geq 8 \\ 3x - 2y \leq 12 \\ x + 5y \leq 21 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(6,3)$ y $D(1,4)$.

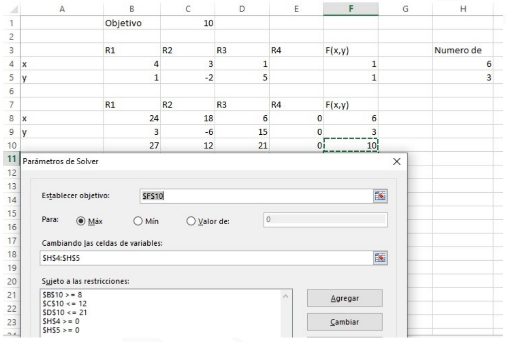


b) $f(x,y) = x + y + 1$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(2,0) = 3 \\ f(4,0) = 5 \\ f(6,3) = 10 \ \text{Máximo} \\ f(1,4) = 6 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 10 y se obtiene para $x = 6$ e $y = 3$.



0.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.13.2 Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil € y la de viura 3 mil €. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

a) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos.

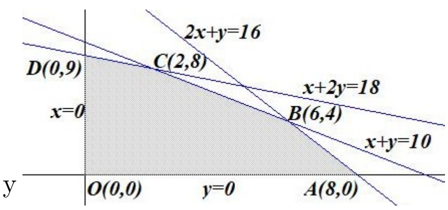
b) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo.

Solución:

Llamamos x : nº de hectáres de tempranillo e y : nº de hectáres de viura.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 10x + 20y \le 180 \\ 20x + 10y \le 160 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 10 \\ x + 2y \le 18 \\ 2x + y \le 16 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



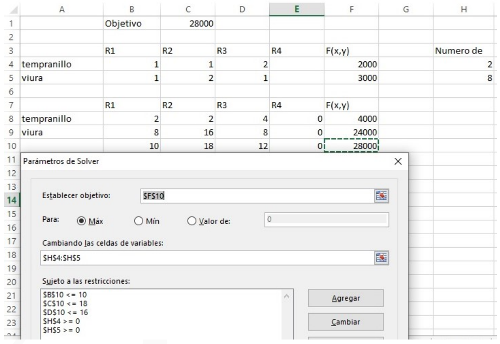
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(6,4)$, $C(2,8)$ y $D(0,9)$.

b) $f(x,y) = 2000x + 3000y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(8,0) = 16000 \\ f(6,4) = 24000 \\ f(2,8) = 28000 \ \text{Máximo} \\ f(0,9) = 27000 \end{cases}$$

Se deben cultivar 2 hectáreas de tempranillo y 8 hectáreas de viura con un beneficio máximo de 28000 €.



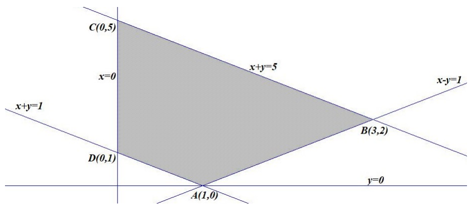
0.14. Madrid

0.14.1. Modelo de 2020

Problema 0.14.1 Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 €, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 €. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x : nº de Ha de trigo e y : nº de Ha de cebada.



La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

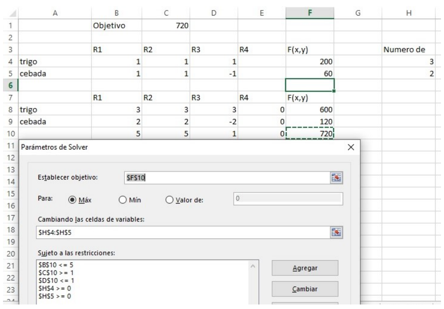
Los vértices a estudiar serán: $A(1,0)$, $B(3,2)$, C(0,5) y $D(0,1)$

La función objetivo es $f(x,y) = 200x + 60y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(1,0) = 200 \\ f(3,2) = 720 \\ f(0,5) = 300 \\ f(0,1) = 60 \end{cases} \Longrightarrow \text{El máximo beneficio será de 720 €}$$

que se obtiene plantando 3 Ha de trigo y 2 Ha de cebada.

Solución por solver :



0.14.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.14.2 La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \ \ 0 \leq y \leq 15, \ \ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \ \ y - x \leq 10, \ \ y + 20 \geq 2x$$

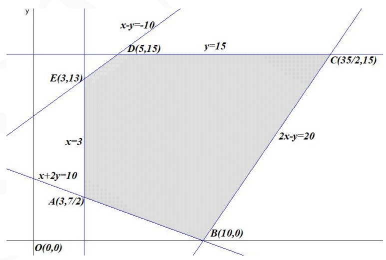
a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \\ y - x \leq 10 \\ y + 20 \geq 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x + 2y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 2x - y \leq 20 \end{cases}$$



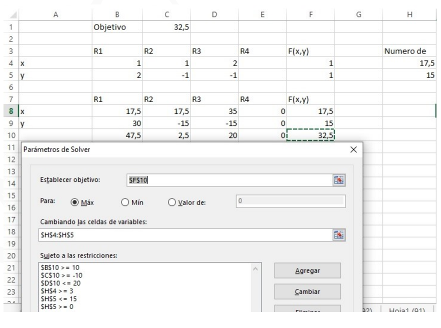
Los vértices son: $A\left(3, \dfrac{7}{2}\right)$, $B(10, 0)$, $C\left(\dfrac{35}{2}, 15\right)$, $D(5, 15)$ y $E(3, 13)$.

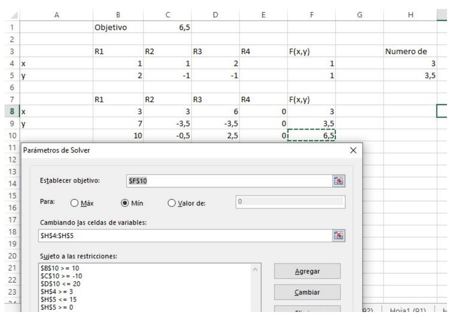
b) La función objetivo $f(x, y) = x + y$ sobre los vértices da los siguientes resultados:

$$\begin{cases} f\left(3, \dfrac{7}{2}\right) = 6,5 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(10, 0) = 10 \\ f\left(\dfrac{35}{2}, 15\right) = 32,5 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(5, 15) = 20 \\ f(3, 13) = 16 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C\left(\dfrac{35}{2}, 15\right)$ con un valor de 32,5 y el mínimo en el punto $A\left(3, \dfrac{7}{2}\right)$ con un valor de 6,5.

Solución por solver :





0.14.3. Convocatoria junio de 2020 (coincidente)

Problema 0.14.3 *(2 puntos)* Considere la región del plano S definida por

$$x - y \geq 0, \quad y + 2x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 2$$

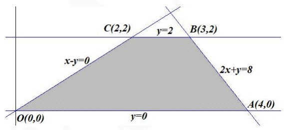
a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) La región factible:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ y + 2x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{array}\right.$$

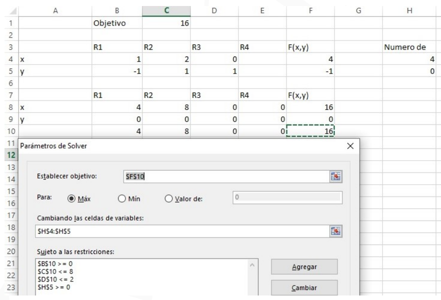


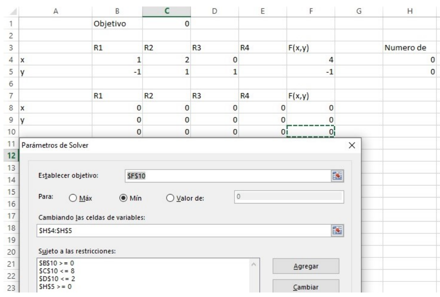
Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(2, 2)$

b) $f(x, y) = 4x - y$ en S:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(4,0) = 16 \\ f(3,2) = 10 \\ f(2,2) = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow$$ El valor máximo será de 16 y se alcanza en el punto $A(4, 0)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0, 0)$.

Solución por solver :





0.14.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.14.4 Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

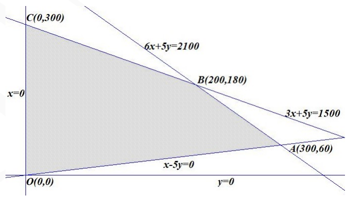
Sea x número de m^3 de tipo A e y número de m^3 de tipo B.

a) Podemos construir la siguiente tabla:

	tierra vegetal	horas de trabajo
A	60	30
B	50	50
Totales	≤ 21000	≤ 15000

La región factible será:

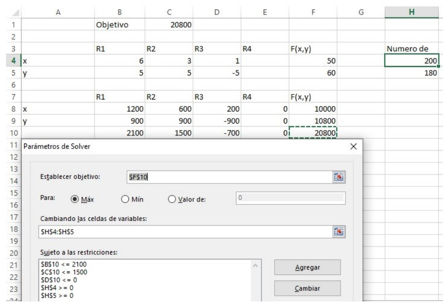
$$\begin{cases} 60x + 50y \leq 21000 \\ 30x + 50y \leq 15000 \\ x \leq 5y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x + 5y \leq 2100 \\ 3x + 5y \leq 1500 \\ x - 5y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(300,60)$, $B(200,180)$ y $C(0,300)$

b) $f(x,y) = 50x + 60y$ en S:

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(300,60) = 18600 \\ f(200,180) = 20800 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,300) = 18000 \end{cases} \Longrightarrow$$

El beneficio máximo será de 20800 € y se alcanza con 200 m^3 de A y 180 m^3 de B.

0.15. Murcia

0.15.1. Modelo de 2020

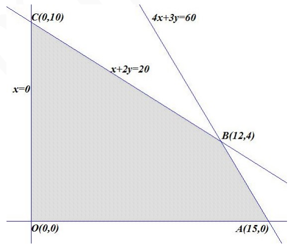
Problema 0.15.1 En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 € y 12 €, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta.

Solución:
Llamamos x : nº de dulces de A e y : nº de dulces de B.

	Azucar	Huevos	Venta
A	$0,5$	8	15
B	1	6	12
	≤ 10	≤ 120	

La región factible es:

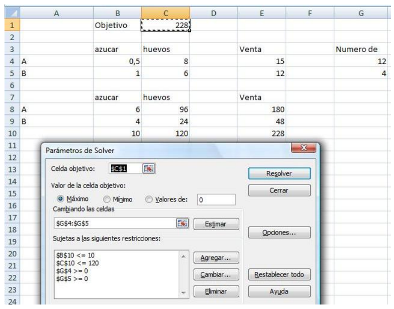
$$\begin{cases} 0,5x + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(15,0)$, $B(12,4)$ y $C(0,10)$.

$f(x,y) = 15x + 12y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(15,0) = 225 \\ f(12,4) = 228 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,10) = 120 \end{cases}$$

Se deben fabricar 12 dulces A y 4 dulces B con un precio máximo de 228 €.

0.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

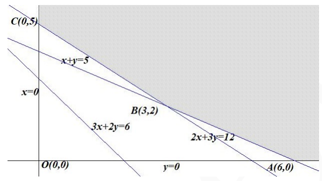
Problema 0.15.2 La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresa diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:
Llamamos x : nº de semanas de la empresa 1 e y : nº de de semanas de la empresa 2.

	Pinos	Eucaliptus	Chopos	Coste
empresa 1	30	20	20	33000
empresa 2	20	30	20	35000
	≥ 60	≥ 120	≥ 100	

La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 30x+20y\geq 60 \\ 20x+30y\geq 120 \\ 20x+20y\geq 100x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+2y\geq 6 \\ 2x+3y\geq 12 \\ x+y\geq 5 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



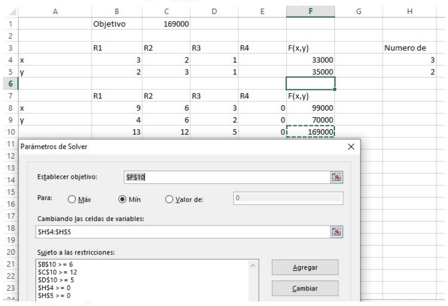
Los vértices son: $A(6,0)$, $B(3,2)$ y $C(0,5)$.

$f(x,y)=33000x+35000y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(6,0)=198000 \\ f(3,2)=169000,\ \text{Mínimo} \\ f(0,5)=175000 \end{array}\right.$$

La empresa 1 debe de trabajar 3 semanas y 2 la empresa 2 con un coste mínimo de 169000 €.

Solución por solver :



0.15.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.15.3 Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\geq 2x-4,\ y\leq x-1,\ 2y\geq x,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

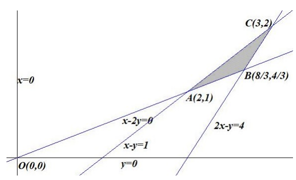
b) Maximizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} y\geq 2x-4 \\ y\leq x-1 \\ 2y\geq x \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y\leq 4 \\ x-y\geq 1 \\ x-2y\leq 0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(2,1)$, $B\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$ y $C(3,2)$.

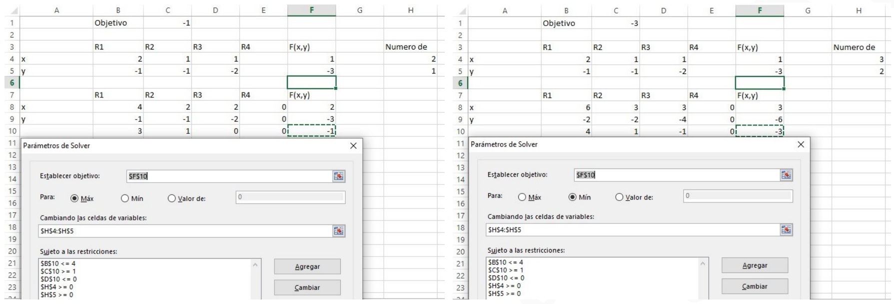
$f(x,y)=x-3y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2,1)=-1\ \text{Máximo} \\ f\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3} \\ f(3,2)=-3\ \text{Mínimo} \end{array}\right.$$

b) El valor máximo se alcanza en el punto $A(2,1)$ y vale -1.

c) El valor mínimo se alcanza en el punto $C(3,2)$ y vale -3.

Solución por solver :



0.16. Navarra

0.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.16.1 Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales ($T1$ y $T2$) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 € y 1800 €, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible $T1$ requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible $T2$ requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

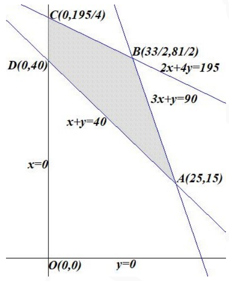
c) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible $T1$ produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible $T2$ produce 10 unidades de contaminación.

Solución:
Llamamos x : nº de toneladas de aceite de $T1$ e y : nº de toneladas de aceite de $T2$.

	Horas	Materia prima	Venta
$T1$	3	2	2000
$T2$	1	4	1800
	≤ 90	≤ 195	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 90 \\ 2x + 4y \leq 195 \\ x + y \geq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

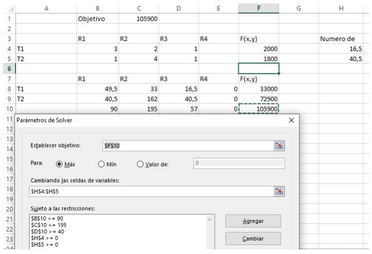


b) Los vértices son: $A(25,15)$, $B\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right)$, $C\left(0, \frac{195}{4}\right)$ y $D(0,40)$.

c) $f(x,y) = 2000x + 1800y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(25,15) = 77000 \\ f\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right) = 105900 \text{ Máximo} \\ f\left(0, \frac{195}{4}\right) = 87750 \\ f(0,40) = 72000 \end{cases}$$

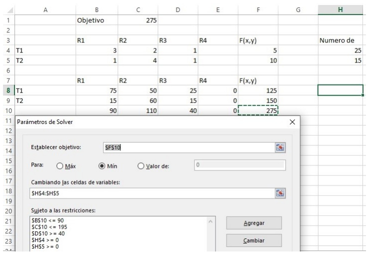


La producción sería máxima con 16,5 toneladas de $T1$ y 40,5 de $T2$ con una venta de 105900 €.

d) Ahora la función objetivo es $f(x,y) = 5x + 10y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(25,15) = 275 \text{ Mínimo} \\ f\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right) = 487,5 \\ f\left(0, \frac{195}{4}\right) = 487,5 \\ f(0,40) = 400 \end{cases}$$



La contaminación es mínima cuando se producen 25 toneladas de $T1$ y 15 de $T2$, con un valor de 275.

0.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.16.2 Una empresa diseña y vende dos tipos de telas ($T1$ y $T2$) con un precio de venta de 60 €/m^2 y 100 €/m^2, respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m^2 de telas. Para elaborar un m^2 de tela $T1$ se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m^2 de tela $T2$ se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m^2 de cada tipo de tela es 15 y 10 €, respectivamente?

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m^2 de tela $T1$ que de tela $T2$.

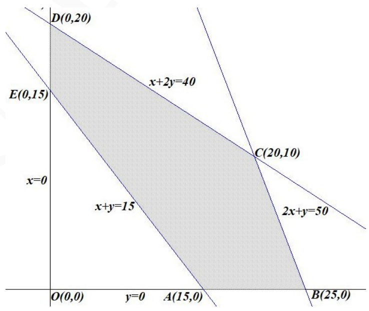
Solución:

Llamamos x : nº de m^2 de la tela $T1$ e y : nº de m^2 de la tela $T2$.

	Horas máquina	Carretes hilo	Venta	Coste	Beneficio
$T1$	2	6	60	15	45
$T2$	4	3	100	10	90
	≤ 80	≤ 150			

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ 2x+4y \leq 80 \\ 6x+3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \geq 15 \\ x+2y \leq 40 \\ 2x+y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

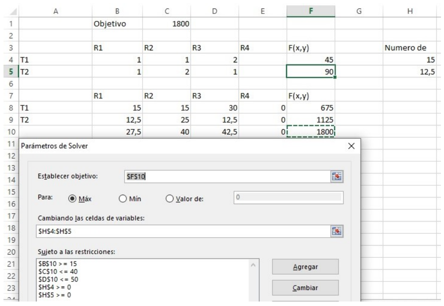


Los vértices son: $A(15,0)$, $B(25,0)$, $C(20,10)$, $D(0,20)$ y $E(0,15)$.

b) La función objetivo es: $f(x,y) = 45x + 90y$

$$\begin{cases} f(15,0) = 675 \\ f(25,0) = 1125 \\ f(20,10) = 1800 \text{ Máximo} \\ f(0,20) = 1800 \\ f(0,15) = 1350 \end{cases}$$

Solución por solver :

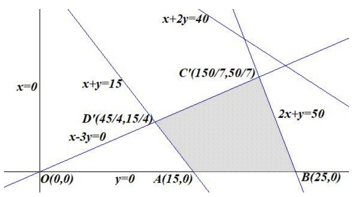


La solución no es única, será cualquier punto del segmento que une el punto $C(20,10)$ con el punto $D(0,20)$ con máximo beneficio de 1800 €.

Este segmento sería $\left\{(x,y)/y = \dfrac{40-x}{2}, \ \forall x \in [0,20]\right\}$

c) Tenemos que añadir la inecuación $x \geq 3y$. Con esta inecuación tendríamos la siguiente región factible:

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x+y \geq 15 \\ 2x+4y \leq 80 \\ 6x+3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-3y \geq 0 \\ x+y \geq 15 \\ x+2y \leq 40 \\ 2x+y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



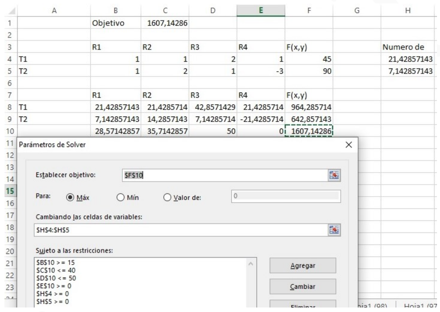
Ahora los vértices son: $A(15,0)$, $B(25,0)$, $C'\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{50}{7}\right)$ y $D'\left(\dfrac{45}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$

La función objetivo es: $f(x,y) = 45x + 90y$

$$\begin{cases} f(15,0) = 2100 \\ f(25,0) = 2100 \\ f\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{50}{7}\right) = 1607,14 \text{ Máximo} \\ f\left(\dfrac{45}{4}, \dfrac{15}{4}\right) = 843,75 \end{cases}$$

De tela $T1$ habría que vender 21,43 m^2 y de la $T2$ habría que vender 7,14 m^2, con un beneficio de 1607,14 €.

Solución por solver :



0.17. País Vasco

0.17.1. Modelo de 2020

Problema 0.17.1 Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 €. La de tipo B se vende a 30 € y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	$1\,\text{kg}$	$1,5\,\text{kg}$
B	$1,5\,\text{kg}$	$1\,\text{kg}$

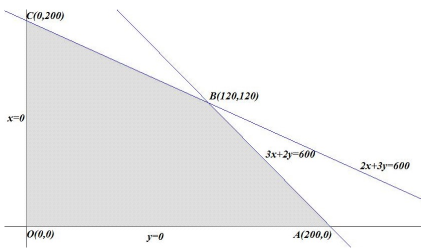
Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Solución:
Llamamos x : nº de tartas tipo A e y : nº de tartas tipo B.

	Masa	Chocolate	Beneficio
A	1	$1,5$	24
B	$1,5$	1	30
	≤ 300	≤ 300	

La región factible es:

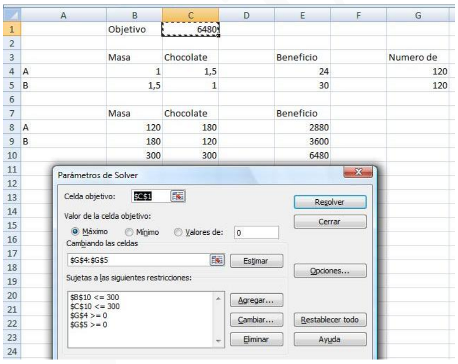
$$\begin{cases} x + 1,5y \leq 300 \\ 1,5x + y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 600 \\ 3x + 2y \leq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(200,0)$, $B(120,120)$ y $C(0,200)$.

$f(x,y) = 24x + 30y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(200,0) = 4800 \\ f(120,120) = 6480 \text{ Máximo} \\ f(0,200) = 6000 \end{cases}$$

Se deben producir 120 tartas tipo A y 120 de B con un beneficio máximo de 6480 €.

0.17.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.17.2 Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.
Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.

- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

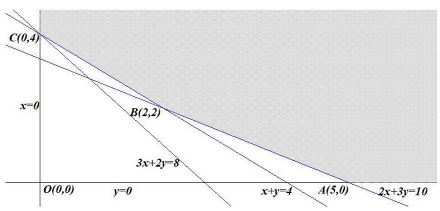
¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

Solución:
Llamamos x : nº de paquetes de la agencia A e y : nº de paquetes de la agencia B.

	Museo	Visita guiada	Espectáculo	Precio
A	6	4	4	210
B	4	6	4	230
	≥ 16	≥ 20	≥ 16	

La región factible es:

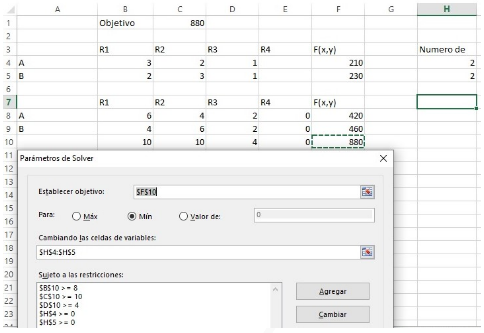
$$\begin{cases} 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \geq 8 \\ 2x + 3y \geq 10 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(5,0)$, $B(2,2)$ y $C(0,4)$.

$f(x,y) = 210x + 230y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(5,0) = 1050 \\ f(2,2) = 880 \ \text{Mínimo} \\ f(0,4) = 920 \end{cases}$$

Se deben comprar 2 paquetes de la agencia A y 2 de la B con un coste mínimo de 880 €.

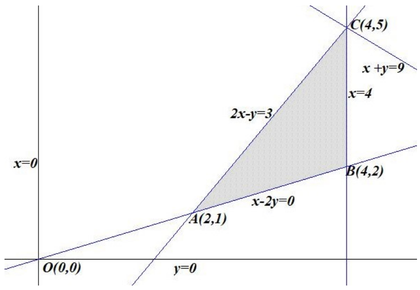
0.17.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.17.3 Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x+4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

La región factible es:

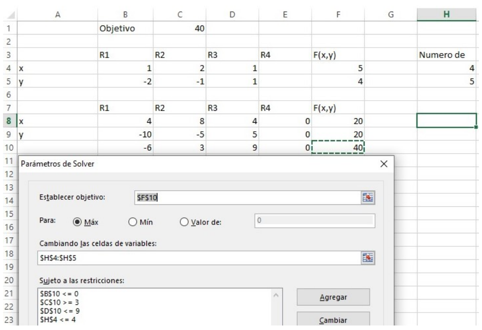


$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 2x - y \geq 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(4, 5)$.

La función objetivo es: $F(x, y) = 5x + 4y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} F(2,1) = 14 \\ F(4,2) = 28 \\ F(4,5) = 40 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C(4, 5)$ con un valor de 40 unidades.