

## Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Abril 2022

---

---

**Problema 1** Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas,  $A$  y  $B$ , contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna  $A$ , 1500 la  $B$  y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la  $A$  y el 95 % de los vacunados con la  $B$ , generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?
- Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

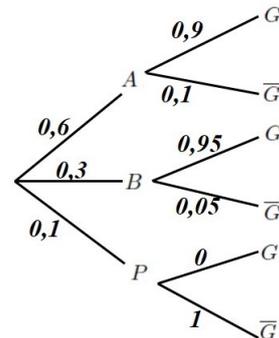
**Solución:**

Sean  $A$  se le administra la vacuna  $A$ ,  $B$  se le administra la vacuna  $B$ ,  $P$  se le administra placebo,  $G$  genera anticuerpos y  $\bar{G}$  no genera anticuerpos.

$$P(A) = \frac{3000}{5000} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad P(B) = \frac{1500}{5000} = \frac{3}{10} = 0,3 \quad \text{y} \quad P(P) = 0,1$$

$$\text{a) } P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|P)P(P) = 0,9 \cdot 0,6 + 0,95 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0 = 0,825$$

$$\text{b) } P(P|\bar{G}) = \frac{P(\bar{G}|P)P(P)}{P(\bar{G})} = \frac{1 \cdot 0,1}{1 - 0,825} = 0,57143$$



**Problema 2** De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

- Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.
- Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.
- Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

**Solución:**

$E$ : productos electrónicos,  $\bar{E}$ : no productos electrónicos,  $I$ : Internet y  $\bar{I}$ : no internet.  
 $P(E) = 0,55$ ,  $P(\bar{E}) = 0,45$ ,  $P(I) = 0,72$ ,  $P(\bar{I}) = 0,28$  y  $P(E|I) = 0,64$

$$a) P(E|I) = \frac{P(E \cap I)}{P(I)} \implies P(E \cap I) = P(E|I)P(I) = 0,64 \cdot 0,72 = 0,4608$$

$$b) P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(E \cap I) = 0,72 + 0,55 - 0,4608 = 0,8092$$

$$c) P(\bar{I}|\bar{E}) = \frac{P(\bar{I} \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\overline{I \cup E})}{P(\bar{E})} = \frac{1 - P(I \cup E)}{P(\bar{E})} = \frac{1 - 0,8092}{0,45} = 0,424$$

**Problema 3** Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

- Calcule un intervalo de confianza al 99,5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.
- Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

**Solución:**

$$n = 250 \quad \hat{p} = \frac{115}{250} = 0,46, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,54$$

$$a) NC = 99,5\% = 0,995 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,005 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,0025$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9975 \implies z_{\alpha/2} = 2,81$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,81 \sqrt{\frac{0,46 \cdot 0,54}{250}} = 0,0886$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,46 - 0,0886; 0,46 + 0,0886) = (0,3714; 0,5486) = (37,14\%, 54,86\%)$$

$$b) E = 0,05$$

$$0,05 = 2,81 \sqrt{\frac{0,46 \cdot 0,54}{n}} \implies n \geq \left(\frac{2,81}{0,05}\right)^2 (0,46 \cdot 0,54) = 784,5565 \implies$$

$$n = 785$$

**Problema 4** Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

- a) ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria  $X$ ?
- b) Para estimar la media poblacional de la variable  $X$ , se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

11,8 10 9,8 12 9,7 10,8 9,6 11,3 10,4 12,2 9,1 10,5

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97%, para estimar la media poblacional.

- c) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1,2.

**Solución:**

a)  $X \equiv N(\mu, 4), n = 12 \implies \bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{4}{\sqrt{12}}\right) = N\left(\mu, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

b)  $n = 12, \bar{X} = 10,6$  y  $\sigma = 4$ .

$$NC = 97\% = 0,97 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,03 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \implies z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \frac{4}{\sqrt{12}} = 2,506$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (10,6 - 2,506; 10,6 + 2,506) = (8,094; 13,106)$$

c)  $E = 1,2$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \frac{4}{\sqrt{n}} = 1,2 \implies n \geq \left(\frac{2,17 \cdot 4}{1,2}\right)^2 = 52,321 \implies$$

$$n = 53$$

**Problema 5** Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

- a) Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?
- b) Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

**Solución:**

a)  $\hat{p} = 0,2 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,8$

$$NC = 98\% = 0,98 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,02 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,01$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \implies z_{\alpha/2} = 2,335$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \implies 0,1 = 2,335 \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \implies n \geq \left(\frac{2,335}{0,1}\right)^2 (0,2 \cdot 0,8) = 87,2356 \implies n = 88$$

b)  $n = 50, \hat{p} = \frac{12}{50} = 0,24 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,76$  y  $z_{\alpha/2} = 2,335$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,335 \sqrt{\frac{0,24 \cdot 0,76}{50}} = 0,1410$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,24 - 0,1410; 0,24 + 0,1410) = (0,0990; 0,3810) = (9,90\%; 38,10\%)$$