Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Marzo 2022

Problema 1 Dada la función $f(x) = \dfrac{ax}{3x^2+1}$, se pide:

a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \dfrac{4}{3}\ln 4$, donde F denota una primitiva de f.

b) Suponiendo el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \frac{ax}{3x^2+1}\,dx = \frac{a}{6}\ln|3x^2+1| + C$

$\left\{\begin{array}{l} F(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \\ F(1) = \dfrac{4}{3}\ln 4 \Longrightarrow \dfrac{a}{6}\ln 4 + C = \dfrac{4}{3}\ln 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \dfrac{a}{6}\ln 4 = \dfrac{4}{3}\ln 4 \Longrightarrow \dfrac{a}{6} = \dfrac{4}{3} \Longrightarrow a =$
8

b) $f(x) = \dfrac{8x}{3x^2+1}$

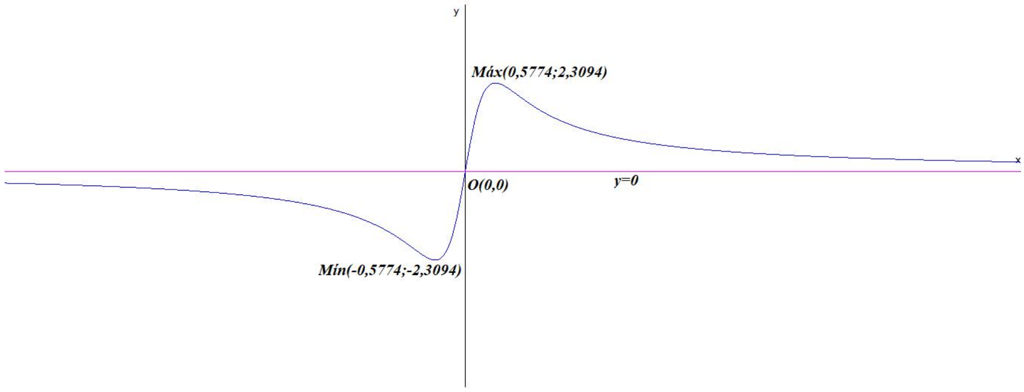
- ☛ Tenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $(0,0)$ único punto de corte con los ejes, $f(-x) = -f(x)$ por lo que es impar y la función es negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y positiva en el $(0,\infty)$
- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: no hay
  - Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{3x^2+1} = 0$$

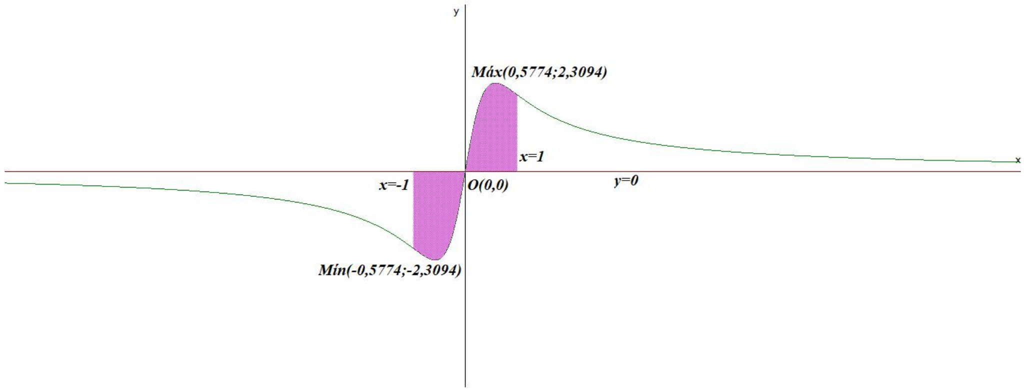
  - Oblicuas: no hay por haber horizontales.
- ☛ Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{8(3x^2-1)}{(3x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = (-0,5774; -2,3094)$ y un máximo relativo en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = (0,5774; 2,3094)$



☛ $S = 2\int_0^1 f(x) \; = 2(F(1) - F(0)) = 2\left(\frac{8}{3}\ln 2 - 0\right) = \frac{16}{3}\ln 2 \simeq 3,6968\ u^2$



Problema 2 Se ha investigado el tiempo en minutos (f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x) de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, \quad x \geq 0$$

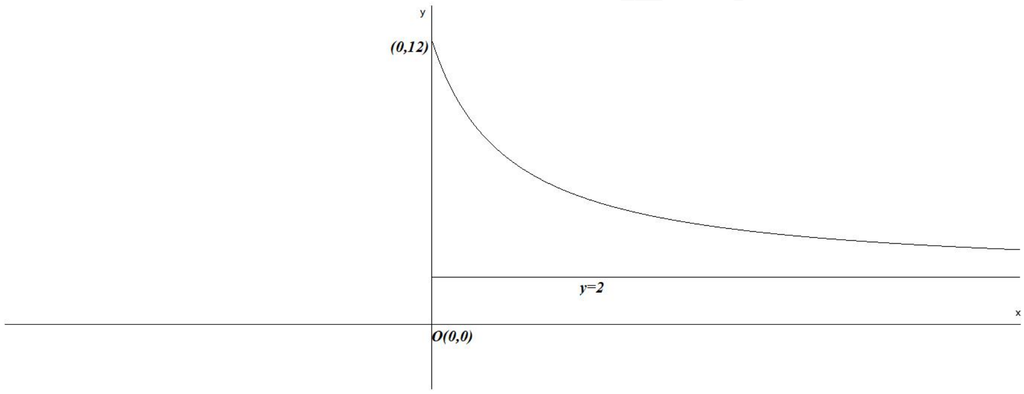
a) Estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?

b) Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 2 minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para realizar la prueba en menos de 4 minutos?

Solución:

a) $f(x) = 2 + \dfrac{300}{x+30}$

- ☛ Tenemos $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$, con punto de corte $(0, 12)$ y es siempre positiva.
- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: no hay
  - Horizontales: $y = 2$
  $$\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{300}{x+30} \right) = 2$$
  - Oblicuas: no hay por haber horizontales.
- ☛ Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{300}{(x+30)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos. Como $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ decreciente en el intervalo $(0, \infty)$



b) En $y = 2$ hay una asíntota horizontal y la curva siempre está por encima de ella, luego no será capaz de llegar a los dos minutos.
Para llegar a los 4 minutos necesita entrenar:
$$2 + \frac{300}{x+30} = 4 \Longrightarrow x = 120 \text{ días}$$

Problema 3 Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:
$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 8 \\ \dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

a) Determina el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

Solución:

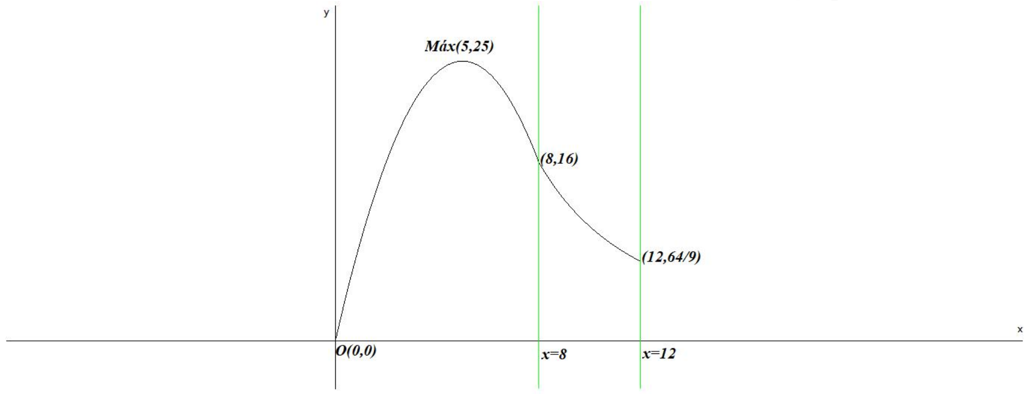
a) La función f es continua en cualquiera de las dos ramas. Para que sea continua en $x = 8$ tenemos:
$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} (10x - x^2) = 16$ y $\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \frac{a}{x^2} = \frac{a}{64}$.
Para que f sea continua en $x = 8 \Longrightarrow 16 = \frac{a}{64} \Longrightarrow a = 1024$.

b) Si $a = 1024 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{1024}{x^2} & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$

- Tenemos $\mathrm{Dom}(f) = [0, 12]$, $10x - x^2 = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ cuando $x = 10$ está fuera de la rama. La otra rama no tiene puntos de corte. Además la función es siempre positiva.
- Asíntotas:
  - Verticales: no hay
  - Horizontales: $y = 0$
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1024}{x^2} = 0$$
  en el caso de salirse del dominio de definición.
  - Oblicuas: no hay por haber horizontales.
- Monotonía: $f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 8 \\ -\dfrac{2048}{x^3} & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$
  Cuando $0 \le x \le 8 \Longrightarrow 10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$.

	$(0, 5)$	$(5, 8)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 5)$ y decreciente en $(5, 8)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(5, 25)$
Cuando $8 < x \le 12 \Longrightarrow -\frac{2048}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en el intervalo $(8, 12)$ y no tiene extremos relativos.
Por otro lado: $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$, $f(8) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $f(12) = \frac{64}{9} \Longrightarrow$



$\left(12, \dfrac{64}{9}\right)$

El momento en el que se produce la máxima energía desde el amanecer es en la hora 5 con 25 unidades de energía.

Problema 4 Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3,2$ y $x = -2$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x^3 + 3x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + C$

$F(2) = 4 + 8 + C = 10 \Longrightarrow C = -2 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3 - 2$

b)
- ☛ Tenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, puntos de corte $(0,0)$ y $(-3,0)$, $f(-x) \neq \pm f(x)$ por lo que no tiene simetría y la función es negativa en el intervalo $(-\infty,-3)$, es positiva en el $(-3,0)$ y positiva en el $(0,\infty)$
- ☛ Asíntotas: No tiene, es un polinomio.
- ☛ Monotonía: $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$

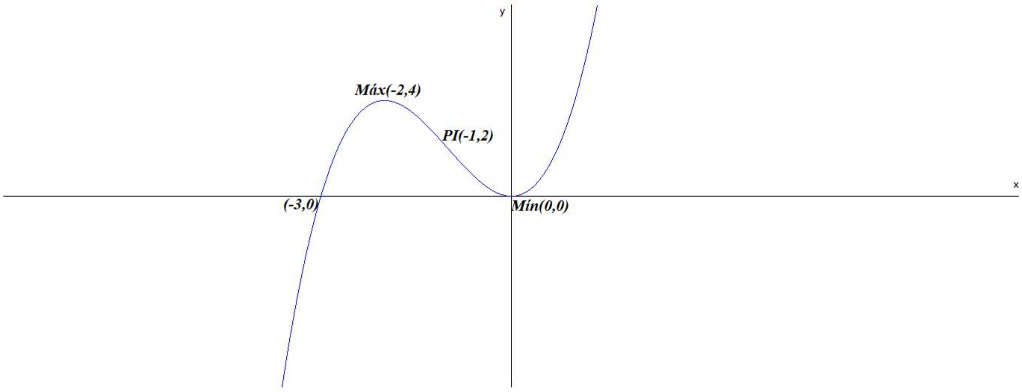
	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-2,0)$ y creciente en $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$ y un máximo relativo en $(-2,4)$

- ☛ Curvatura: $f''(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, -1)$ y cóncava $\smile$ en el $(-1, \infty)$, por lo que tiene un punto de inflexión en el punto $(-1, 2)$



☛ En el intervalo $[-3,2;-2]$ la función corta en $x = -3$ y tenemos dos recintos de integración $S_1 : [-3,2; -3]$ y $S_2 : [-3, -2]$.
$F(x) = \displaystyle\int (x^3 + 3x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + C$

$$S_1 = \int_{-3,2}^{-3} f(x)\, dx = F(-3) - F(-3,2) = -\frac{491}{2500} = -0,1964$$

$$S_2 = \int_{-3}^{-2} f(x)\, dx = F(-2) - F(-3) = \frac{11}{4} = 2,75$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{491}{2500} + \frac{11}{4} = \frac{3683}{1250} = 2,9464\ u^2$$