Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2021

Problema 1 *(2 puntos)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$.

b) Calcular $AB^t - A^tB$.

c) Resolver la ecuación $B^tX + A^tB = A^t$.

siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.

Solución:

a) Calcule $(AB)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$.

b) $AB^t - A^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B^tX + A^tB = A^t \Longrightarrow B^tX = A^t - A^tB = A^t(I - B) \Longrightarrow X = (B^t)^{-1}A^t(I - B)$

$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$X = (B^t)^{-1}A^t(I - B) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$\begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)*En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de alumnos que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de alumnos que realizan la opción C que las que escogen B.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x el número de alumnos que eligen la opción A, y el número de alumnos que eligen la opción B y z el número de alumnos que eligen la opción C.

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x = 3(y + z) \\ z = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & -4 & -4 & -120 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right]$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & -4 & -4 & -120 \\ 0 & 0 & -6 & -120 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única:

$z = \dfrac{120}{6} = 20$, $-4y - 80 = -120 \Longrightarrow y = \dfrac{40}{4} = 10$ y $x + 10 + 20 = 120 \Longrightarrow x = 90$

La opción A la eligen 90 alumnos, la B la eligen 10 alumnos y la C la eligen 20 alumnos.

Problema 3 *(2 puntos)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que $A^tB = C - zI$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4y - 2x & x - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & 1 \\ 0 & -z - 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ 4y - 2x = 0 \\ x - 12 = -z - 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Problema 4 *(2 puntos)*Dadas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2

b) Calcular a, b y c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a + b & 1 \\ 0 & b^2 & b + c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a^2 & a + b & 1 \\ 0 & b^2 & b + c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a=\pm 1\\ a+b=0\\ b=\pm 1\\ b+c=0\\ c^2=\pm 1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1,\ \ b=-1,\ \ c=1\\ a=-1,\ \ b=1,\ \ c=-1\end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)*Dado el sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=5\\ 5x+ay-z=11\\ 3x-y+az=2\end{array}\right.$$

a) Discutir para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Resolverlo la solución del sistema para $a=2$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5\\ 5 & a & -1 & 11\\ 3 & -1 & a & 2\end{array}\right) \Longrightarrow |A|=a^2-8a-9=0 \Longrightarrow a=-1$ y $a=9$.

- Si $a\neq -1$ y $a\neq 9 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5\\ 5 & -1 & -1 & 11\\ 3 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-5F_1\\ F_3-3F_1\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -6 & -6 & -14\\ 0 & -4 & -4 & -13\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3-2F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -6 & -6 & -14\\ 0 & 0 & 0 & -11\end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible no tiene solución

- Si $a=9$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5\\ 5 & 9 & -1 & 11\\ 3 & -1 & 9 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-5F_1\\ F_2-3F_1\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 4 & -6 & -14\\ 0 & -4 & 6 & -13\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible no tiene solución

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 5x + 2y - z = 11 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 8/7 \\ y = 64/21 \\ z = 17/21 \end{array}\right.$$