Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Octubre 2021

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -m & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.

b) Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a)
$$\begin{vmatrix} m & -m & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 3 & -7 \end{vmatrix} = -m^2 - 17m + 18 = 0 \Longrightarrow m = -18, \quad m = 1$$

Si $m = -18$ o $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq -18$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & 0 \\ 7/9 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A; \quad A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$$

Luego $A^n = \begin{cases} A & \text{si} \quad n \text{ impar} \\ I & \text{si} \quad n \text{ par} \end{cases} \Longrightarrow A^{1000} = I$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a+c = 2a \Longrightarrow c = 0 \\ 2b+d = a+b \Longrightarrow a = b-d \\ c = 2c \Longrightarrow c = 0 \\ d = c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} b-d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.