Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Diciembre 2021

Problema 1 Discute el siguiente sistema en función del parámetro a.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - ay + 2az = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Resuelve el sistema si $a = 1$.

Solución:

- $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$; $|A| = 2a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = \dfrac{3}{2}$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq \dfrac{3}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

  Luego el sistema es incompatible (no tiene solución)

- Si $a = \dfrac{3}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 2 & -3/2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -9/2 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -9/2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Luego el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ -3y + 6 = 3 \Longrightarrow y = 1 \\ x + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{cases}$$ Luego: $x = 0$, $y = 1$ y $z = 3$.

Problema 2 Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19 \quad 3x - 4y \leq -13 \quad x \geq -7 \quad -x - y \geq 2$$

a) Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

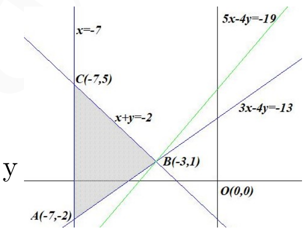
b) ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

c) Responda de forma razonada si la función $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

Solución:

a) La región es S:

$$\begin{cases} 5x - 4y \leq -19 \\ 3x - 4y \leq -13 \\ x \geq -7 \\ x + y \leq -2 \end{cases}$$

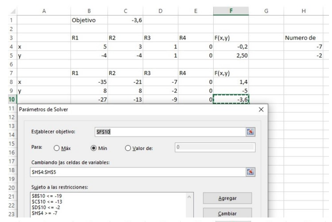


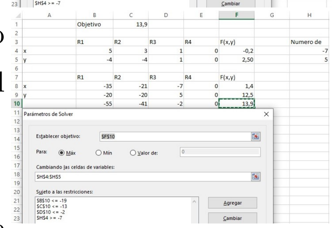
Los vértices a estudiar serán: $A(-7, -2)$, $B(-3, 1)$ y $C(-7, 5)$.

b) $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$

$$\begin{cases} G(-7, -2) = -\dfrac{18}{5} \simeq -3,6 \text{ Mínimo} \\ \\ G(-3, 1) = \dfrac{31}{10} \simeq 3,1 \\ \\ G(-7, 5) = \dfrac{139}{10} \simeq 13,9 \text{ Máximo} \end{cases} \Longrightarrow$$

Solución por solver :





La función $G(x, y)$ tiene el mínimo valor en el punto $A(-7, -2)$ y vale $-\frac{18}{5}$. Y tiene un máximo valor en el punto $C(-7, 5)$ con un valor de $\frac{139}{10}$.

c) $\frac{47}{3} \simeq 15,667 > 13,9$ que es el valor máximo que puede tomar la función en ese recinto y, por tanto, es imposible obtener valores superiores.