Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2022

Problema 1 Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$.

a) Calcula la ecuación de la recta, r', que pase por A y B.

b) Determina la posición relativa de las rectas r y r'.

c) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

Solución:

$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = -(1, 3, 4) \\ P_r(3, 4, 1) \end{cases}$

a) $r' : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r'}} = \overrightarrow{AB} = (1, 3, -4) \\ P_{r'} = B(3, 4, 1) \end{cases} \Longrightarrow r' : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

b) $P_{r'} = P_r = (3, 4, 1)$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_{r'}} \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y r' se cortan en el punto $P_{r'} = P_r = (3, 4, 1)$

c) $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 5)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 4, 1)$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(-19, 13, 5)| = \frac{\sqrt{555}}{2}\ u^2$$

Problema 2 Se pide:

a) Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Solución:

a) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ P_r(-1,0,1)\end{cases}$ y $\overrightarrow{PP_r}=(-1,0,1)-(1,0,1)=(-2,0,0)$

$$\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{PP_r}\right| = |\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}| = |2(0,1,1)| = 2\sqrt{2}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{PP_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ u$$

b) $s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,-2a,2)\\ P_s(0,1,0)\end{cases}$ y $t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(a,-1,1)\\ P_t(1,-1,2)\end{cases}$

$\overrightarrow{u_s}\parallel\overrightarrow{u_t}\Longrightarrow\overrightarrow{u_s}=k\overrightarrow{u_t}\Longrightarrow(2,-2a,2)=k(a,-1,1)\Longrightarrow\begin{cases}2=ka\\ -2a=-k\\ 2=k\end{cases}\Longrightarrow$

$\begin{cases}k=2\\ a=1\end{cases}$

Luego: $s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,-2,2)\\ P_s(0,1,0)\end{cases}$ y $t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,-1,1)\\ P_t(1,-1,2)\end{cases}$

Para comprobar que no son coincientes sustituimos P_s en t:

$$\frac{0-1}{1}\neq\frac{1+1}{-1}=\frac{0-2}{1}$$

Como $P_s\notin t\Longrightarrow r\parallel t$ cuando $a=1$.

Problema 3 Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$ y $\overrightarrow{AD}=(1,1,1)$.

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|1|=\frac{1}{6}\ u^3$$

b) $\pi:\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(1,1,0)\\ A(0,0,1)\end{cases}\Longrightarrow\pi:\begin{vmatrix}x & y & z-1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$

$\pi: x-y+z-1=0$

$r \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 1)$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \\ P_r = D(1, 1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$$

Problema 4 Sean los planos $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + az = 0$

a) Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_{pi_1}} = (a, 1, 2)$ y $\overrightarrow{u_{pi_2}} = (2, -1, a)$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_{pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{pi_2}} = 0 \Longrightarrow 2a - 1 + 2a = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{4}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow \pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 + 0 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$