Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2021

Problema 1 Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A=(0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_1 \equiv x+2z=1$, siendo:

$$B_1=(-1,0,2),\quad B_2=(1,3,1),\quad B_3=(2,-1,0).$$

Solución:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{B_1B_2}=(2,3,-1)\\ \overrightarrow{B_1B_3}=(3,-1,-2)\\ B_1(-1,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix} x+1 & y & z\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$\pi_1: -7x+y-11z-7=0$$

$$\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_{\pi_1}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 2\\ -7 & 1 & -11\end{vmatrix}=(-2,-3,1)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_{\pi_1}}=(-2,-3,1)\\ P_r=A(0,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=-2\lambda\\ y=1-3\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$r:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}\Longrightarrow$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{-3}\Longrightarrow 3x-2y+2=0\\ \dfrac{x}{-2}=\dfrac{z-1}{1}\Longrightarrow x+2z-2=0\end{array}\right.$$

Problema 2 Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1}=(-1,1,1),\quad \overrightarrow{u_2}=(0,3,1),\quad \overrightarrow{u_3}=(1,-2,0),\quad \overrightarrow{u_4}=(-2,0,1)$$

a) Compruebe si los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\overrightarrow{v_1}=2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2},\quad \overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_3},\quad \overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{u_4}$$

b) Calcule las siguientes expresiones:

$$(2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2})\cdot(2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2})\,;\quad (\overrightarrow{u_4}-\overrightarrow{u_1})\times(\overrightarrow{u_4}-\overrightarrow{u_1})$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

Solución:

a) $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = 2(-1,1,1) - (0,3,1) = (-2,-1,1)$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3} = (-1,1,1) + (1,-2,0) = (0,-1,1)$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1)$
$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes.

b)
- ☛ $2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (-2,-1,1)$
  $(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) = (-2,-1,1) \cdot (-2,-1,1) = 4 + 1 + 1 = 6$
- ☛ $\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1} = (-2,0,1) - (-1,1,1) = (-1,-1,0)$
  $(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) = (-1,-1,0) \times (-1,-1,0) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,0)$

Problema 3 Calcule la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $(1,-2,0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $(1,0,1)$, $(3,1,0)$ y $(2,-1,1)$. Exprésela como intersección de dos planos.
Solución:
Sean $A(1,0,1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,-1,1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$ y $\overrightarrow{AC} = (1,-1,0)$. La recta r que buscamos

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1,1,3) \\ \\ P_r(1,-2,0) \end{array} \right.$$

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} \Longrightarrow x - 1 = y + 2 \Longrightarrow \pi_1 : x - y - 3 = 0$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{z}{3} \Longrightarrow 3x - 3 = z \Longrightarrow \pi_2 : 3x - z - 3 = 0$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x - y - 3 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 4 Dadas las rectas $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = z$ y $s: \left\{ \begin{array}{r} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{array} \right.$

a) Comprueba que las rectas se cruzan.

b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r. Halla la distancia entre el punto $P = (-1,1,0)$ de la recta r y el plano π.

c) Calcula la distancia entre las rectas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,-2,1)\\ P_r(-1,1,0)\end{array}\right. \quad \text{y } s:\left\{\begin{array}{l}x=-1-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=1\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-2,1,0)\\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(0,-1,1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr}0&-1&1\\3&-2&1\\-2&1&0\end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-2,1,0)\\ \overrightarrow{u_r}=(3,-2,1)\\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{rrr}x+1&y&z-1\\-2&1&0\\3&-2&1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi: x+2y+z=0$$

$$d(P,\pi)=\frac{-1+2+0}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

c) Como $r\parallel\pi$ cualquier punto de r a π tiene la misma distancia. Como s está contenida en π la distancia buscada es la calculada en el apartado anterior. De todas formas la calculamos.

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{rrr}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\3&-2&1\\-2&1&0\end{array}\right||=|(-1,-2,-1)|=\sqrt{6}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$