Examen de Matemáticas II (Modelo 2022)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.
Solución:
Sean x número de alumnos de inglés, y número de alumnos de francés y z número de alumnos de alemán.

$$\left\{\begin{array}{l} x=0,6(x+y+z)\\ y-10=z+10\\ \dfrac{x}{4}=8+2(y-z)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-3y-3z=0\\ y-z=20\\ x-8y+8z=32\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=192\\ y=74\\ z=54\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} 1-\dfrac{\sin x}{x} & \text{si} & x<0\\ \\ xe^{4-x^2} & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0,\infty)$.

c) (0,75 punto) Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

a) ☛ Continuidad en $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=1-\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}1-\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\cos x}{1}=0\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{4-x^2}=0\\ f(0)=0\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=f(0)\Longrightarrow f$ es continua en $x=0$.

☛ Derivabilidad en $x=0$:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2} & \text{si} & x<0\\ \\ (1-2x^2)e^{4-x^2} & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{2}=0$$

$f'(0^+)=e^4\Longrightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+)\Longrightarrow f$ no es derivable en $x=0$

b) En la rama $(0,\infty) \Longrightarrow f(x) = xe^{4-x^2} \Longrightarrow f'(x) = (1-2x^2)e^{4-x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Tiene un máximo relativo en los puntos de abscisa $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int xe^{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4-x^2 \\ dt = -2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{-2x} \end{array}\right] = \int xe^t \dfrac{dt}{-2x} = -\dfrac{1}{2}\int e^t\,dt =$

$-\dfrac{e^t}{2} + C = -\dfrac{e^{4-x^2}}{2} + C$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = -\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} = \frac{e^4-1}{2} \simeq 26,8$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

Solución:

a) Tenemos:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} = (2,1,-2) \\ P_r = P(1,0,2) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-2\lambda \end{array}\right.$$

El punto de impacto es el punto de corte de r con π:
$2(1+2\lambda) - \lambda + 2(2-2\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 11$
Sustituyendo en r tenemos el punto $H(23, 11, -20)$
Si α es el ángulo que forma $\overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,2)$ con $\overrightarrow{u_r} = (2,1,-2)$
$\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_\pi}||\overrightarrow{u_r}|} = \dfrac{|4-1-4|}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{9}$

b) Un punto genérico de la trayectoria sería $A(1+2\lambda, \lambda, 2-2\lambda)$ y sería $d(A,\pi) = 1$:
$d(A,\pi) = \dfrac{|2(1+2\lambda) - \lambda + 2(2-2\lambda) + 5|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|11-\lambda|}{3} = 1 \Longrightarrow |11-\lambda| = 3$

$\begin{cases} 11-\lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = 8 \Longrightarrow A_1(17, 8, -14) \\ 11-\lambda = -3 \Longrightarrow \lambda = 14 \Longrightarrow A_2(29, 14, -26) \end{cases}$ Lo lógico es que los puntos calculados estén separados por el plano π y pertenecen a la recta. Observamos la segunda coordenada en la que $y = \lambda$ y tenemos $P(1, 0, 2)$, continúa con $Q(3, 1, 0)$, continúa con $A_1(17, 8, -14)$ e impacta en $H(23, 11, -20)$. Luego el punto $A_2(29, 14, -26)$ vendría después del impacto y no sería válido.

Problema 4 *(2,5 puntos)* Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

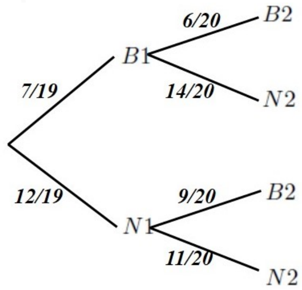
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

Solución:

Sean $B1$ sale blanca en la primera extracción, $B2$ sale blanca en la segunda extracción, $N1$ sale negra en la primera extracción y $N2$ sale negra en la segunda extracción.



a) $P(B2) = P(B2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) =$
$\frac{6}{20} \cdot \frac{7}{19} + \frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{15}{38} \simeq 0,3947$

b) $P(\text{distinto color primera y segunda}) =$
$P(N2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) =$
$\frac{14}{20} \cdot \frac{7}{19} + \frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{103}{190} \simeq 0,5421$

c) $P(N1|B2) = \frac{P(B2|N1)P(N1)}{P(B2)} = \frac{\frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19}}{\frac{15}{38}} = \frac{18}{25} \simeq 0,72$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2021) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para $a = 2$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

Solución:

a) $|A| = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$, para estos valores $\nexists A^{-1}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea $f(x) = x + x^2$, se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.

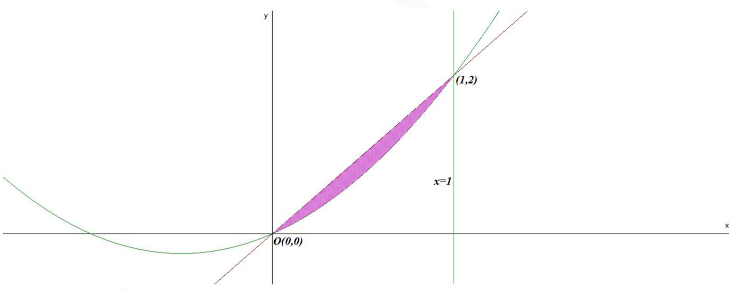
b) (1,5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

Solución:

a) Buscamos los puntos de corte entre las dos gráficas: $f(x) = g(x) \Longrightarrow x + x^2 = 2x \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$
Tenemos $S = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx \right|$

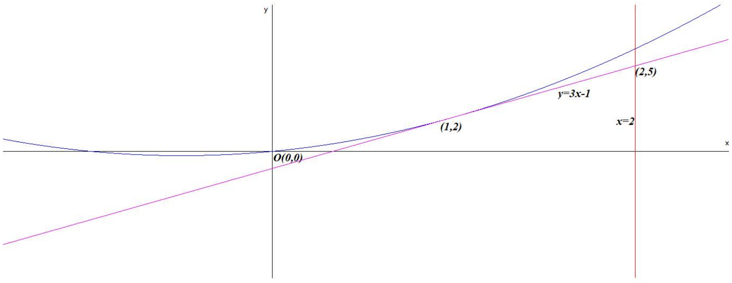
$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 (x + x^2 - 2x)\, dx = \int_0^1 (x^2 - x)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{6} = 0,1667\ u^2$$



b) $a = 1 \Longrightarrow b = f(a) = f(1) = 2$
$f'(x) = 1 + 2x \Longrightarrow m = f'(a) = f'(1) = 3$
La recta tangente $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Longrightarrow y = 3x - 1$

El punto de corte con $x = 2 \Longrightarrow y = 5 \Longrightarrow (2, 5)$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$ y $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1, 7, 1)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

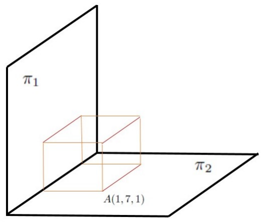
Solución:

a) Los vectores normales a los planos tienen que ser perpendiculares $\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, -2, 3)(3, 0, -1) = 3 + 0 - 3 = 0$

b) Analizamos:
Observamos que el punto $A \in \pi_2$ luego el lado del cubo es la distancia de A a π_1:

$$d(A, \pi_1) = \frac{|1 - 14 + 3 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

El volumen del cubo es $\left(\frac{16}{\sqrt{14}}\right)^3 = \frac{1024\sqrt{14}}{49} \simeq 78,193\ u^3$



c) Seguimos el siguiente procedimiento:

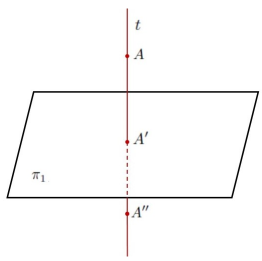
☛ Calculamos una recta $t \perp \pi_1$ tal que $A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (1, -2, 3) \\ P_t = A(1, 7, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array} \right.$$

☛ Calculamos el punto de corte A' de t con π_1:

$$(1 + \lambda) - 2(7 - 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = \frac{8}{7}$$

Sustituyendo en t: $A'\left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right)$



☛ A' es el punto medio entre A y el punto que buscamos A'':

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{30}{7}, \frac{66}{7}, \frac{62}{7}\right) - (1, 7, 1) = \left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7}\right)$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0,2 y 0,3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0,5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0,5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0,75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0,75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

Solución:

Tenemos $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ y los sucesos A y B son independientes, es decir, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$
$= 1 - (0,2 + 0,3 - 0,06) = 0,56$

c) $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$
$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,12 = 0,38$

d) $n = 10$, $p = 0,2$ y $q = 1 - p = 0,8 \Longrightarrow B(10; 0,2)$

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a \cdot q^{n-a}$$

$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^7 = 0,201326592$