

Examen de Matemáticas II (Coincidente 2022)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ mx + (m+1)y - z = m-1 \\ -x - 2y + (2m-1)z = 1-m \end{cases}$$

- a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m .
b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & -1 & m-1 \\ -1 & -2 & 2m-1 & 1-m \end{array} \right); \quad |A| = 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$m = 1, \quad m = -3$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + 3F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -15 & 8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $m = 1$:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

- a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.
- b) (1,5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow$ la función no tiene extremos relativos, además
 $f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f$ es decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$.

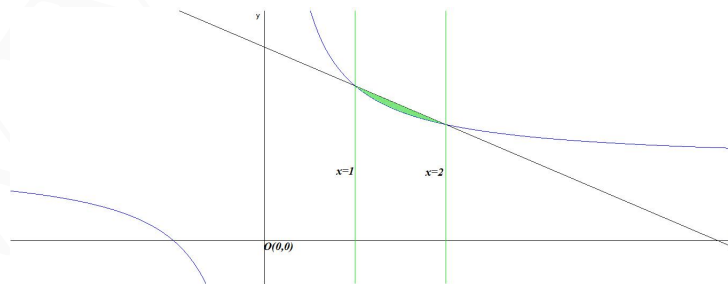
b) $f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = \frac{5-x}{2} \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{2x} = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 2$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2x} \right) dx =$$

$$\int \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \ln|x| + C$$

$$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2x} \right) dx = F(2) - F(1) = 1 - 3 + \ln 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$\ln 2 - \frac{3}{4} \simeq -0,0569 \Rightarrow S = |S_1| = \frac{3}{4} - \ln 2 \simeq 0,0569 \text{ u}^2$$



Problema 3 (2,5 puntos) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el punto $P(1, 1, 0)$.

- a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.
- b) (1,5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P , son perpendiculares a r y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 0) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases}$$

- a) Un punto de r es $Q(\lambda, \lambda, 0)$ y tenemos:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(\lambda - 1, \lambda - 1, 0)| = |\lambda - 1| \sqrt{2} = 1 \implies$$

$$|\lambda - 1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies$$

$$\begin{cases} \lambda - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \lambda = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \simeq 1,7071 \implies Q_1(1,7071; 1,7071; 0) \\ \lambda - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \lambda = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \simeq 0,2929 \implies Q_2(0,2929; 0,2929; 0) \end{cases}$$

- b) Sea $\vec{u}_t = (a, b, c) \perp r \implies \vec{u}_t \cdot \vec{u}_r = 0 \implies a + b = 0 \implies b = -a$

Si $\pi : x = 0 \implies \vec{u}_\pi = (1, 0, 0)$ y tenemos:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_t|}{|\vec{u}_\pi| |\vec{u}_t|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \implies$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (-a)^2 + c^2}} \implies \sqrt{2a^2 + c^2} = 2a \implies 2a^2 + c^2 = 4a^2 \implies$$

$$c^2 = 2a^2 \implies c = \pm a\sqrt{2}$$

$$\text{Luego } \vec{u}_t = (a, -a, \pm a\sqrt{2}) = a(1, -1, \pm\sqrt{2}) \implies$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -1, \sqrt{2}) \\ P_t(1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

O bien

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -1, -\sqrt{2}) \\ P_t(1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

Problema 4 (2,5 puntos) En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62 % y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12 % de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B . Se pide:

- (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B .
- (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B .
- (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

Solución:

Tenemos $P(A) = 0,62$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,12$

$$a) P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,62 - 0,12}{1 - 0,4} = 0,8333$$

$$b) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,62 + 0,4 - 0,12) = 0,1$$

$$c) p = 0,4 \implies q = 0,6 \implies B(3000; 0,4) \\ \text{Como } n > 10, np = 1200 > 5 \text{ y } nq = 1800 > 5 \implies \\ \mu = np = 3000 \cdot 0,4 = 1200 \text{ y } \sigma = \sqrt{npq} = 26,83 \implies$$

$$N(1200; 26,83)$$

$$P(X > 1250) = P\left(Z \geq \frac{1250,5 - 1200}{26,83}\right) = P(Z \geq 1,88) = \\ 1 - P(Z \leq 1,88) = 1 - 0,9699 = 0,0301$$

Examen de Matemáticas II (Coincidente 2022)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$
y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sea compatible.}$$

- b) (1,5 puntos) Calcular los valores de a , b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow |\overline{A}| = a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Si $a \neq -1 \Rightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 \neq \text{Rango}(A) \leq 2 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

$$\text{Si } a = -1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow |\overline{A}| = 0 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq$$

$0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) = \text{número de incógnitas} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

- b) Para que se cumpla que el producto de dos de las matrices sea igual a la tercera tiene que ser $\underset{2 \times 3}{B} \cdot \underset{3 \times 2}{C} = \underset{2 \times 2}{A}$, el resto de combinaciones posibles son falsas o imposibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+11 & 8 \\ 5a+3c+8 & 2(a+c+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+11=c \\ 5a+3c+8=1 \\ 2(a+c+3)=b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

- a) (0,5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.
- b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.
- c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1, 2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1 .

Solución:

a) $g(2) = (f(2))^2 = 1^2 = 1$

$$g'(x) = 2(f(x))f'(x) \implies g'(2) = 2f(2)f'(2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

b) $h(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) \implies h'(x) = f'(x)f'(f(x))$

$$a = 1, b = h(1) = f(f(1)) = f(2) = 1 \text{ y } m = h'(1) = f'(1)f'(f(1)) = 1 \cdot f'(2) = 2$$

$$y - b = m(x - a) \implies y - 1 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 1$$

c) $f(x)$ función continua y derivable en todo $\mathbb{R} \implies f(x)$ función continua y derivable en $[1, 2]$. Con estas condiciones el teorema del valor medio

nos asegura que existe un $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1$

Problema 3 (2,5 puntos)

a) (0,5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(0, 2, 2\sqrt{3})$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$.

c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s , siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0$, $z = 0$.

Solución:

a) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{0 + 0 + \sqrt{3}}{1 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

b) $\vec{OA} = (2, 0, 0)$, $\vec{OB} = (0, 3, 0)$ y $\vec{OC} = (0, 2, 2\sqrt{3})$

$$V = \left| [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} \right| = 12\sqrt{3} u^3$$

c) $r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{OC} = 2(0, 1, \sqrt{3}) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \sqrt{3}\lambda \end{cases}$

$$s : \begin{cases} y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 0, 0) \\ P_s(0, 3, 0) \end{cases}$$

Obtenemos la recta $t \perp r, s$ como intersección de dos planos. Primero obtenemos

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, \sqrt{3}, -1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, \sqrt{3}, -1) \\ \vec{u}_r = 2(0, 1, \sqrt{3}) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 : x = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, \sqrt{3}, -1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 0) \\ P_s(0, 3, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -y - \sqrt{3} + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_2 : y + \sqrt{3}z - 3 = 0$$

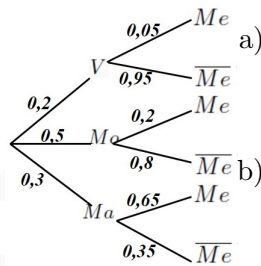
$$t : \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{3}z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (2,5 puntos) Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20 % de fotografías dedicadas a viajes, un 50 % referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5 % de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20 % de las de moda y con el 35 % de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

- (1,25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.
- (1,25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.

Solución:

Sean V fotografías de viajes, Mo fotografías de moda, Ma fotografías de maternidad, Me menos de 20000 *Me gusta* y $\overline{Me}$ menos de 20000 *Me gusta*.



$$\begin{aligned} \text{a) } P(\overline{Me}) &= P(\overline{Me}|V)P(V) + P(\overline{Me}|Mo)P(Mo) + \\ &P(\overline{Me}|Ma)P(Ma) = 0,95 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,5 + \\ &0,65 \cdot 0,3 = 0,785 \end{aligned}$$

$$P(V|Me) = \frac{P(Me|V)P(V)}{P(Me)} = \frac{0,05 \cdot 0,2}{1 - 0,785} = 0,0465$$