Examen de Matemáticas II (Ordinaria 2022)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $m = \dfrac{1}{2}$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 2m^2+m-1 = 0 \Longrightarrow m = -1 \;\; m = \frac{1}{2}$$

- Si $m \neq -1$ y $m \neq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

- Si $m = \dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $m = \dfrac{1}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ \\ \dfrac{1}{2}x + 2y - z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}\lambda \\ \\ y = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si} & x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0,5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} (x^3 e^{-1/x^2}) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^3 e^{-1/x^2}) = f(0) = 0$$

f es continua en $x = 0$
Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} e^{-1/x^2}(3x^2 + 2) & \text{si} & x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0 \Longrightarrow f$ es derivable en $x = 0$.

b) $f(-x) = (-x)^3 e^{-1/(-x)^2} = -x^3 e^{-1/x^2} = -f(x) \Longrightarrow f$ es IMPAR, simétrica respecto al origen.

c) $F(x) = \int \frac{f(x)}{x^6}\,dx = \int \frac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6}\,dx = \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = -\frac{1}{x^2} \\ dt = \frac{2}{x^3}dx \\ dx = \frac{x^3}{2}dt \end{array} \right] =$

$\int \frac{e^t}{x^3}\frac{x^3}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{2} = \frac{e^{-1/x^2}}{2} + C$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx = F(2) - F(1) = \frac{e^{-1/4}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \simeq 0,2054606709$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{array} \right.$

a) (0,5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) (1,25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0,75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x+y = 2$ y la recta r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ P_r(0,-10,90) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{u_r} = (1,2,1)$
Si $z = 0 \Longrightarrow 90 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -90 \Longrightarrow H(-90,-190,0)$

b) Calculamos un plano π que contenga a P y sea perpendicular r, el punto buscado será la intersección de π con r.
$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \Longrightarrow \pi : x + 2y + z + \alpha = 0$, como $P \in \pi \Longrightarrow 1 + 2 + 1 + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -4 \Longrightarrow \pi : x + 2y + z - 4 = 0$
Sustituyendo la recta en el plano tenemos:

$$\lambda + 2(-10 + 2\lambda) + (90 + \lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -11$$

Sustituyendo en la recta: $\left\{ \begin{array}{l} x = -11 \\ y = -32 \\ z = 79 \end{array} \right. \Longrightarrow R(-11,-32,79)$

c) Sustituimos r en el plano $\pi' : x + y = 2$:

$$\lambda + (-10 + 2\lambda) + 0(90 + \lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = 4$$

Luego el plano π' y la recta r se cortan.
Tenemos $\overrightarrow{u_r} = (1,2,1)$ y $\overrightarrow{u'_\pi} = (1,1,0)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u'_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u'_\pi}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Según el Instituto Nacional de Estadítica, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

Solución:

a) $B(10; 0,277)$
$P(X=5) = \binom{10}{5} 0,277^5 \cdot (1-0,277)^{10-5} = 0,08118781857$

b) Sea A el suceso al menos hay un hombre tendremos:
$P(A) = 1 - (P(X=10)) = 1 - \binom{10}{10} 0,277^{10} \cdot (1-0,277)^{10-10} = 0,9999973405$

c) Tenemos $p = 0,277$, $q = 1 - 0,277 = 0,723$.
Como $n = 200 > 10$, $np = 200 \cdot 0,277 = 55,4 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,723 = 144,6 > 5$ podemos utilizar la aproximación a una normal:

$$X \approx B(n;p) \Longrightarrow X \approx N(np; \sqrt{npq})$$

$$X \approx B(200; 0,277) \Longrightarrow X \approx N(55,4; 6,329)$$

$$0,35 \cdot 200 = 70$$

$$P(X \ge 70) = P\left(Z > \frac{69,5 - 55,4}{6,329}\right) = P(Z > 2,23) = 1 - P(Z < 2,23)$$
$$= 1 - 0,9871 = 0,0129$$

Examen de Matemáticas II (Ordinaria 2022) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:

Sean x la edad de Pablo, y la edad de Alejandro y z la edad de Alicia.
El reparto proporcional a la edad sería:

$$\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1 \Longrightarrow \frac{x}{45}+\frac{y}{45}+\frac{z}{45}=1$$

Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=45 \\ x+y=2z+3 \\ \dfrac{9450x}{45}-\dfrac{9450z}{45}=420 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=45 \\ x+y-2z=3 \\ x-z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=16 \\ y=15 \\ z=14 \end{array}\right.$$

Pablo tiene 16 años, Alejandro tiene 15 años y Alicia 14 años. El reparto será:

Pablo recibe $\dfrac{16\cdot 9450}{45}=3360€$

Alejandro recibe $\dfrac{15\cdot 9450}{45}=3150€$

Alicia recibe $\dfrac{14\cdot 9450}{45}=2940€$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

a) (0,5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$.

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

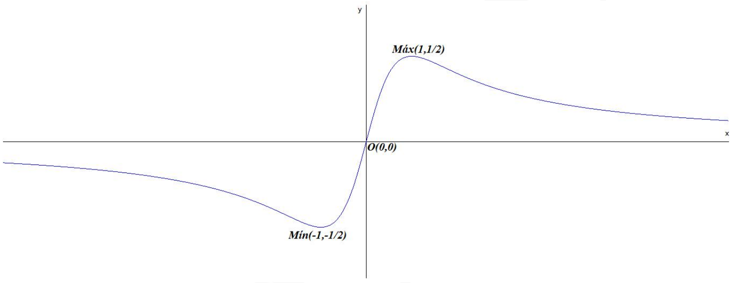
Solución:

a) La función es continua en el intervalo $[-1, 1]$, de hecho lo es en todo $\mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.
$f(-1) = -\dfrac{1}{2} < 0$ y $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$, luego cumple las condiciones del teorema de Bolzano que afirma que $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

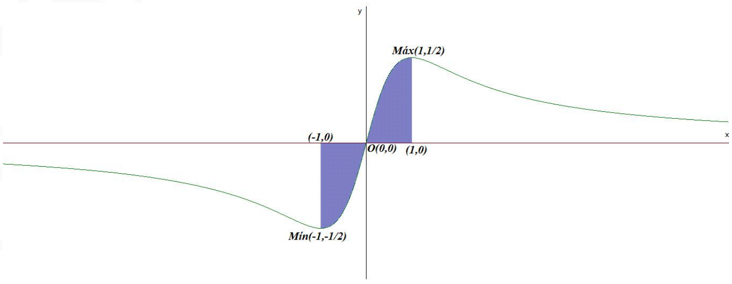
La función decrece en el $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y crece en el intervalo $(-1, 1)$.
La función tiene un mínimo relativo en $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ y un máximo relativo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$



c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0 \Longrightarrow x = 0 \in [-1, 1]$, luego hay dos áreas, una negativa y otra positiva, como además la función es impar el valor absoluto de ambas son iguales. Luego:

$$S = 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx =$$

$$\ln |x^2 + 1|\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\ u^2$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ y el punto $P(0,1,0)$.

a) (0,5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) (0,75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

c) (1,25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases} \Longrightarrow r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,-1,0) \\ P_{r_1}(1,1,-1) \end{cases} \text{ y } \overrightarrow{u_\pi}=(1,1,1)$$

a) Sustituyendo r_1 en el plano π:
$(1+\lambda)+(1-\lambda)-1=1 \Longrightarrow 1=1 \Longrightarrow r_1$ y el plano π tienen infinitos puntos comunes, por lo que $r_1 \subset \pi$.
Ahora sustituimos P en π:
$0+1+0=0 \Longrightarrow P \in \pi$.

b) Calculamos un plano $\pi' \perp r_1$ tal que $P \in \pi'$:
$\pi' : x-y+A=0$ sustituyendo $P \Longrightarrow 0-1+A=0 \Longrightarrow A=1 \Longrightarrow \pi' : x-y+1=0$.
La recta que buscamos es la intersección de π y π':

$$r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

c) $r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}}=\overrightarrow{u_{r_1}}=(1,-1,0) \\ P_{r_2}=P(0,1,0) \end{cases} \Longrightarrow r_2 : \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=0 \end{cases}$

Calculamos la distancia entre r_1 y r_2:

$$d(r_1,r_2)=d(P_{r_2},r_1)=d(P,r_1)=\frac{|\overrightarrow{PP_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ u$$

$\overrightarrow{PP_{r_1}}=(1,1,-1)-(0,1,0)=(1,0,-1)$

$$|\overrightarrow{PP_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| = |-(1,1,1)| = \sqrt{3}$$

Luego el área del cuadrado será:

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} = 1,5\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

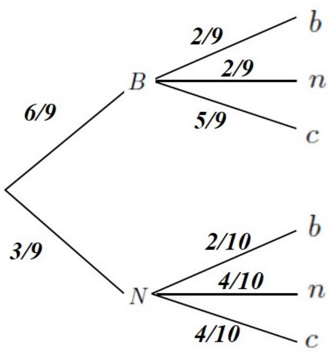
b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Solución:

B: sombrero blanco, N: sombrero negro, b: pañuelo blanco, n: pañuelo negro y c: pañuelo con cuadrados blancos y negros.

a) P(algún color que no sea el del sombrero) $= 1 - P$(el color es el del sombrero) $= 1 - [P(B\cap b) + P(N\cap n)] = 1 - \left[\frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}\right] = 1 - \frac{38}{135} = \frac{97}{135} \simeq 0,7185185185$



b) P(aparece el color negro) $= 1 - P$(no aparece el color negro) $= 1 - P(B\cap b) = 1 - \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{23}{27} \simeq 0,8518518518$

c) $P(N|c) = \frac{P(N\cap c)}{P(c)} = \frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}} = \frac{9}{34} \simeq 0,2647058823$