

Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2022) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución:

Sean x número de ensayos, y número de novelas y z número de biografías.

$$\begin{cases} \frac{3}{16}(x + y + z) = x \\ z + \frac{1}{3}x = 2 + y \\ \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + z = 105 \end{cases} \implies \begin{cases} -13x + 3y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 6 \\ 5x + 8y + 10z = 1050 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 24 \\ y = 55 \\ z = 49 \end{cases}$$

La estantería tiene 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.
- b) (0,25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.
- c) (0,75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
- d) (0,75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 4x + 3) = 3$$

f no es continua en $x = 0$ donde la función presenta un salto. La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) La función no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.

c) Como se ha visto en $x = 0$ hay una asíntota vertical.

En $y = 2$ hay una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

No hay oblicuas por haber horizontales.

En la otra rama no hay asíntotas por tratarse de un polinomio.

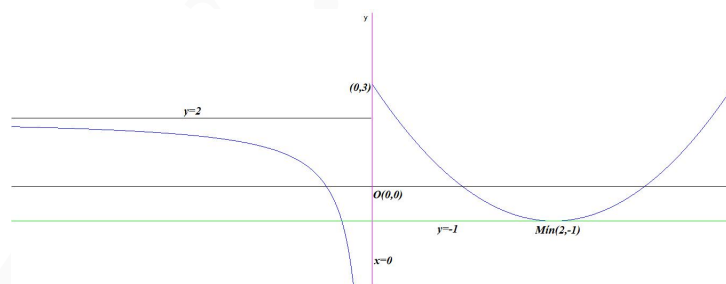
d) $x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Si $a = 2 \Rightarrow b = f(2) = -1$ y la pendiente $m = f'(2) = 0 \Rightarrow y + 1 = 0(x - 2) \Rightarrow y = -1$ recta tangente a f en $x = 2$.

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el $(0, 2)$ y crece en el intervalo $(2, \infty) \Rightarrow f$ tiene un extremo relativo en $x = 2$.

La función tiene un mínimo relativo en $(2, -1)$



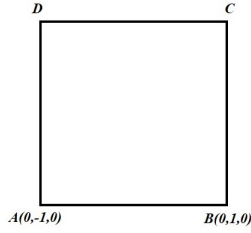
Problema 3 (2,5 puntos) Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π .

a) (1,25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos del cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π , encuentre los posibles puntos C y D .

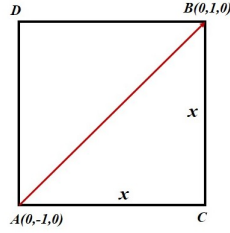
- b) (1,25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π , encuentre los puntos C y D .

Solución:

Apartado a)



Apartado b)



- a) Tenemos $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$ y $|\overrightarrow{AB}| = 2$
Si $C \in \pi \implies C(a, b, a)$
 $\overrightarrow{BC} = (a, b, a) - (0, 1, 0) = (a, b - 1, a)$
 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \implies \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \implies$
 $(0, 2, 0) \cdot (a, b - 1, a) = 2(b - 1) = 0 \implies b = 1$
Luego $C(a, 1, a)$ y $\overrightarrow{BC} = (a, 0, a)$
 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2a^2} = 2 \implies a = \pm\sqrt{2}$
- Si $a = \sqrt{2} \implies C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$ y $\overrightarrow{BC} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$
 $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} =$
 $(0, -1, 0) + (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$
 - Si $a = -\sqrt{2} \implies C(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$ y $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$
 $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} =$
 $(0, -1, 0) + (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$
- b) $|\overrightarrow{AB}| = 2 \implies 4 = 2x^2 \implies x = \sqrt{2} = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$
Si $C \in \pi \implies C(a, b, a) \implies \overrightarrow{BC} = (a, b - 1, a)$ y $\overrightarrow{AC} = (a, b + 1, a)$
 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{2} \implies 2a^2 + (b - 1)^2 = 2$
 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2a^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{2} \implies 2a^2 + (b + 1)^2 = 2$
Luego $(b - 1)^2 - (b + 1)^2 = 0 \implies -4b = 0 \implies b = 0 \implies C(a, 0, a)$
- Tenemos $\overrightarrow{BC} = (a, -1, a) \perp \overrightarrow{AC} = (a, 1, a) \implies$
 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = (a, -1, a) \cdot (a, 1, a) = 2a^2 - 1 = 0 \implies a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Si $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 $\overrightarrow{CA} = (0, -1, 0) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
D &= B + \overrightarrow{BD} = B + \overrightarrow{CA} = (0, 1, 0) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\
&\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
\bullet \text{ Si } a &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
\overrightarrow{CA} &= (0, -1, 0) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
D &= B + \overrightarrow{BD} = B + \overrightarrow{CA} = (0, 1, 0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Problema 4 (2,5 puntos) En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

- (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.
- (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.
- (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Solución:

- a) $B(6; 0,6)$

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} 0,6^4 \cdot (1 - 0,6)^{6-4} = 0,31104$$

- b) Sea A el suceso alguno está matriculado:

$$P(A) = 1 - (P(X = 0)) = 1 - \binom{6}{0} 0,6^0 \cdot (1 - 0,6)^{6-0} = 0,995904$$

- c) Tenemos $p = 0,277$, $q = 1 - 0,277 = 0,723$.

Como $n = 120 > 10$, $np = 120 \cdot 0,6 = 72 > 5$ y $nq = 120 \cdot 0,4 = 48 > 5$ podemos utilizar la aproximación a una normal:

$$X \approx B(n; p) \Rightarrow X \approx N(np; \sqrt{npq})$$

$$X \approx B(120; 0,6) \Rightarrow X \approx N(72; 37)$$

$$P(X > 60) = P\left(Z \geq \frac{60,5 - 72}{\sqrt{37}}\right) = P(Z \geq -2,14) =$$

$$P(Z \leq 2, 14) = 0,9838$$

Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2022) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.
- b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k .
- c) (0,5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ |AB| &= k(k-3) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ y } k = 3 \Rightarrow \exists (AB)^{-1} \forall k \in \mathbb{R} - \{0, 3\} \\ \text{Si } k = 1 &\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \\ |BA| &= 0 \Rightarrow \text{Rango}(BA) < 3, \text{ cogemos el menor } \begin{vmatrix} k+1 & 0 \\ 1-k & -2 \end{vmatrix} = \\ -2(k+1) &= 0 \Rightarrow k = -1 \\ \text{Si } k \neq -1 &\Rightarrow \text{Rango}(BA) = 2. \\ \text{Si } k = -1 & \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ el menor } \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(BA) = \\ 2. & \\ \text{Luego } \text{Rango}(BA) &= 2 \quad \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Con $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Es } 2F_3 = F_1 + F_2, \text{ si ponemos } a = 1, b = 0 \text{ y}$$

$c = 7$ la tercera fila ya no sería combinación lineal de las anteriores, por lo que el $\text{Rango}(\overline{BC}) \neq \text{Rango}(BC) \implies$ sistema incompatible.

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$

Solución:

a) **Continuidad en $x = 0$**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \implies$$

f es continua en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Derivabilidad en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -\infty \implies f \text{ no es derivable en } x = 0.$$

b) En la rama $x \leq 0$ la función es una recta siempre creciente. ($f'(x) = 1 > 0$)

$$\text{En la rama } x > 0 \implies f(x) = x \ln x \implies f'(x) = \ln x + 1 = 0 \implies$$

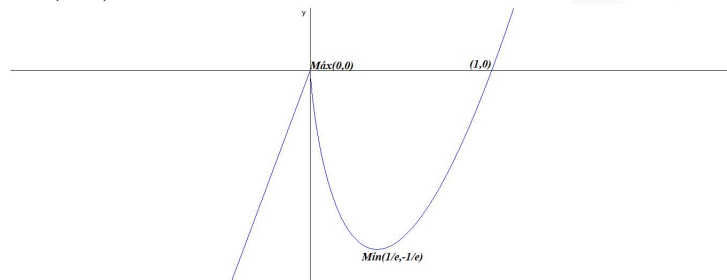
$$\ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

En la rama $x \leq 0$

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	crece ↗	decrece ↘	crece ↗

La función decrece en el $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ y crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, \infty\right) \Rightarrow f$ tiene un extremo relativo en $x = \frac{1}{e}$ y en $x = 0$.

La función tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ y un máximo relativo en $(0, 0)$



$$\begin{aligned} \text{c) } F(x) &= \int x \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{2x^2 \ln x - x^2}{2} + C \Rightarrow \\ F(x) &= \frac{x^2(2 \ln x - 1)}{2} + C \\ \int_1^2 f(x) \, dx &= F(2) - F(1) = 2 \ln 2 - 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \simeq 0,6363 \end{aligned}$$

Problema 3 (2,5 puntos) Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- (1,5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
- (0,5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .

- c) (0,5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q .

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 2, 1) \\ P_r(-1, -1, 0) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 2, 1) \\ P_s(2, 5, 0) \end{cases}$$

$$\text{y } \overrightarrow{P_r P_s} = (3, 6, 0)$$

$$a) [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{Rango} \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{P_r P_s} = (3, 6, 0) \\ \vec{u}_r = (-2, 2, 1) \end{array} \right) = 2 \text{ y}$$

$$\text{Rango} \left(\begin{array}{c} \vec{u}_r = (-2, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (-2, 2, 1) \end{array} \right) = 1 \implies r \text{ y } s \text{ son paralelas.}$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |3(2, -1, 6)| = 3\sqrt{41}$$

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|} = \frac{3\sqrt{41}}{3} = \sqrt{41} \text{ u}$$

$$b) \pi : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P_s} = (3, 6, 0) \\ \vec{u}_r = (-2, 2, 1) \\ P_r(-1, -1, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 6x - 3y + 18z + 3 = 0 \implies \pi : 2x - y + 6z + 1 = 0$$

$$c) \text{ Sea } P \text{ corte de } r \text{ con } z = 0 \implies P(-1, -1, 0)$$

$$\text{Sea } Q \text{ corte de } s \text{ con } z = 0 \implies Q(2, 5, 0)$$

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \overrightarrow{PQ} = 3(1, 2, 0) \\ P_h = P(-1, -1, 0) \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 4 (2,5 puntos) Una empresa comercializa tres tipos de productos A , B y C . Cuatro de cada siete productos son de tipo A , dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C . A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A , un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C . Elegido un producto al azar, se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

- b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Solución:

A producto A , B producto B , C producto C , E exportación y $\bar{E}$ no exportación.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(E) &= P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) = \\ &= 0,4 \cdot \frac{4}{7} + 0,6 \cdot \frac{2}{7} + 0,2 \cdot \frac{1}{7} = 0,4286 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(C|E) = \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)} = \frac{0,2 \cdot \frac{1}{7}}{0,4286} = 0,0667$$

