Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Mayo 2022

Problema 1 *(6 puntos).* Sean el plano $\pi : x + 2y - z + 2 = 0$, la recta $r : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(1, 1, 1)$.
se pide:

a) Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto P.

b) Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.

c) Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P

d) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.

e) Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.

f) Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1), \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases}$$

a)

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P_s = P(1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

b)

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_t = P(1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c)

$$\pi' : x + 2y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + 2 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$$

$$\pi' : x + 2y - z - 2 = 0 \Longrightarrow P \in \pi'$$

d)

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow (1 - \lambda) + 2\lambda - (1 + \lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow 2 = 0$$

Luego la recta $r \parallel \pi$.
El ángulo que forman será $\alpha = 0^\circ$.

e)

$$\pi'' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$x + z - 2 = 0$$

f)

$$h : \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow h : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 *(4 puntos).* Sea el punto $P(1, 0, 1)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : 2x - y + z + 6 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \begin{cases} x - 3y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 1) \\ P_t = P(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + (1 + \lambda) + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow P'\left(-2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$

$$(-4, 3, -1) - (1, 0, 1) = (-5, 3, -2)$$

b) $r : \begin{cases} x - 3y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases}$

Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r / P \in \pi$:

$$3x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 3 + 0 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

$$\pi : 3x + y + z - 4 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:

$$3(1 + 3\lambda) + (\lambda) + (\lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \frac{3}{11} = \frac{14}{11} \\ y = \frac{1}{11} \\ z = \frac{1}{11} \end{array} \right. \Longrightarrow P'\left(\frac{14}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$

$$\left(\frac{28}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right) - (1, 0, 1) = \left(\frac{17}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{9}{11}\right)$$