Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN
Enero 2022

Problema 1 Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(2+\sin\dfrac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})$

Solución:

a) $L=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(2+\sin\dfrac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=[1^\infty]=e^\lambda$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x^2-x}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1+\sin\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}}{2x-1}=\frac{0}{1}=0\Longrightarrow L=e^0=1$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})=[\infty-\infty]=$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}{(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(\sqrt{x^4-x^2+1})^2-(\sqrt{x^4-7})^2}{(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-x^2+8}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=$$
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4}}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$

Problema 2 Se considera la siguiente función $f(x)=\ln(2x+1)$
Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=\dfrac{1}{2}$

Solución:
$b=\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2$ y $m=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1\Longrightarrow y-\ln 2=1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\Longrightarrow y=x-\left(\dfrac{1}{2}-\ln 2\right)$

Problema 3 Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$
Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$. **Solución:**
$b=f(0)=1$ y $m=f'(0)=-2\Longrightarrow y-1=-2(x-0)\Longrightarrow y=-2x+1$ sería la recta tangente.
La recta normal es $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

Problema 4 Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva $f(x) = \dfrac{bx-1}{bx+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
Escriba las funciones que se obtienen.

Solución:
$f'(x) = \dfrac{2b}{(bx+1)^2}$ y $m = f'(0) = 2b = 6 \Longrightarrow b = 3 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{3x-1}{3x+1}$
El punto de tangencia es $(0, f(0)) = (0, -1) \Longrightarrow -1 = 6 \cdot 0 + a \Longrightarrow a = -1$ luego la recta tangente es $y = 6x - 1$.

Problema 5 Sea la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$)

Solución:

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx \\ dx = \dfrac{1}{e^x}dt \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{t}dt \end{array}\right] = \int \frac{1+t}{t(1-t)}\,dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1+t}{t(1-t)} = \dfrac{A}{t} - \dfrac{B}{t-1} = \dfrac{-A(t-1)+Bt}{t(1-t)} \\ 1 + t = -A(t-1) + Bt \\ t = 0 \Longrightarrow 1 = A \\ t = 1 \Longrightarrow 2 = B \\ \dfrac{1+t}{t(1-t)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{t-1} \end{array}\right] = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t-1}\right) dx =$$

$$\ln|t| - 2\ln|t-1| + C = \ln|e^x| - 2\ln|e^x - 1| + C = x - \ln(e^x-1)^2 + C$$

$$F(1) = 1 - 2\ln(e-1) + C = 1 \Longrightarrow C = 2\ln(e-1) \simeq 1,083$$

$$F(x) = x - \ln(e^x-1)^2 + 2\ln(e-1)$$

Problema 6 Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\dfrac{1}{9}$.

Solución:
Calculamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas, para ello hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow xe^{3x} = 0 \Longrightarrow x = 0$, luego los límites de integración son los extremos del intervalo $[0, a]$
Calculamos la primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \int xe^{3x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right] = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx =$$

$$\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}=\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}$$

$$S=\int_0^a xe^{3x}\,dx=\left.\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}\right]_0^a=e^{3a}\frac{3a-1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\Longrightarrow e^{3a}\frac{3a-1}{9}=0\Longrightarrow$$

$$3a-1=0\Longrightarrow a=\frac{1}{3}$$

Problema 7 Sea f la función dada por $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x\neq 2$.

a) Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3,5)$.

Solución:

a)

$$F(x)=\int\frac{3x^2+4}{(x-2)^2}\,dx=\int\left(3+\frac{12x-8}{(x-2)^2}\right)dx=$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{12x-8}{(x-2)^2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}=\dfrac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}\\ 12x-8=A(x-2)+B\\ x=0\Longrightarrow -8=-2A+B\\ x=2\Longrightarrow 16=B\\ B=16,\quad A=12\end{array}\right]=$$

$$3x+\int\left(\frac{12}{x-2}+\frac{16}{(x-2)^2}\right)dx=$$

$$3x+12\ln|x-2|+16\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C$$

b)

$$F(3)=9-16+C=5\Longrightarrow C=12$$

$$F(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+12$$

Problema 8 Calcula $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx$

Solución:

Recordando un poco de trigonometría tenemos:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2\sin^2 x\Longrightarrow \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{2x - \sin 2x}{4}$$

$$F(x) = \int x\sin^2 x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin^2 x\,dx \Longrightarrow v = \dfrac{2x - \sin 2x}{4} \end{array}\right] =$$

$$\frac{2x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int (2x - \sin 2x)\,dx = \frac{2x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} =$$

$$\frac{x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} = \frac{2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{8}$$

$$\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx = F(\pi) - F(0) = \frac{2\pi^2 - 1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Problema 9 Determine la integral: $\displaystyle\int \frac{2 - e^x}{e^{2x} - 1}\,dx$
usando el cambio de variable $t = e^x$

Solución:

$$\int \frac{2 - e^x}{e^{2x} - 1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t} \end{array}\right] = \int \frac{2 - t}{t^2 - 1}\,\frac{dt}{t} =$$

$$\int \frac{2 - t}{(t+1)(t-1)t}\,dt = \left[\begin{array}{c} \dfrac{2 - t}{(t+1)(t-1)t} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t+1} + \dfrac{C}{t-1} = \dfrac{A(t^2-1) + B(t^2-t) + C(t^2+t)}{(t+1)(t-1)t} \\ -t + 2 = A(t^2-1) + B(t^2-t) + C(t^2+t) \\ t = 0 \Longrightarrow 2 = -A \Longrightarrow A = -2 \\ t = 1 \Longrightarrow 1 = 2C \Longrightarrow C = 1/2 \\ t = -1 \Longrightarrow 3 = 2B \Longrightarrow B = 3/2 \end{array}\right] =$$

$$\int \left(\frac{-2}{t} + \frac{3/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}\right) = -2\ln|t| + \frac{3}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln|t-1| + C =$$

$$-2\ln e^x + \frac{3}{2}\ln|e^x + 1| + \frac{1}{2}\ln|e^x - 1| + C = -2x + \frac{3}{2}\ln|e^x + 1| + \frac{1}{2}\ln|e^x - 1| + C$$

Problema 10 Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)\,dx$

Solución:

$$\int \left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \Longrightarrow du = \dfrac{2\ln x dx}{x} \\ dv = x^{1/2}dx \Longrightarrow v = \dfrac{2x^{3/2}}{3} \end{array}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\int x^{1/2}\ln x\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^{1/2}dx \Longrightarrow v = \dfrac{2x^{3/2}}{3} \end{array}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left[\frac{2x^{3/2}\ln x}{3} - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx\right] =$$

$$\frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left[\frac{2x^{3/2}\ln x}{3} - \frac{4x^{3/2}}{9}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{8x^{3/2}\ln x}{9} + \frac{16x^{3/2}}{27} =$$

$$\frac{2x^{3/2}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8)}{27} + C$$