Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2022

Problema 1 Considera la función $f(x) = x^2$

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.

b) Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x)$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$ y el eje OX de abscisas.

c) Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

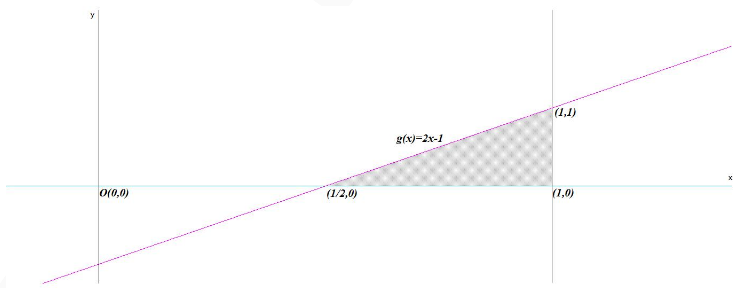
d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$, $x = \dfrac{1}{2}$.

Solución:

a) $b = f(1) = 1$, $f'(x) = 2x \Longrightarrow m = f'(1) = 2$ la recta tangente es $y - 1 = 2(x-1) \Longrightarrow y = g(x) = 2x - 1$

b) Hacemos una representación gráfica del recinto. Se trata de calcular el área de un triángulo de base 1/2 y de altura 1. El área es $\dfrac{1/2 \cdot 1}{2} = \dfrac{1}{4} = 0,25\ u^2$.
De otra manera sería:

$$S = \int_{1/2}^{1} (2x-1)\,dx = x^2 - x\Big]_{1/2}^{1} = \frac{1}{4} = 0,25\ u^2$$



c) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$. Dando un valor cualquiera a C obtenemos una de las primitivas de $f(x)$:

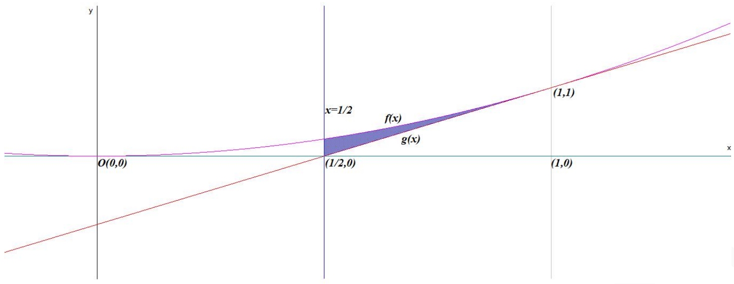
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 7$$

d) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 = 2x - 1 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

$$S_1 = \int_{1/2}^{1} (x^2 - 2x + 1)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{24} \simeq 0,0417\ u^2$$

.



Problema 2 En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, I(t), viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{t^2}{3t^2+1} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

a) Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.

b) Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \longrightarrow \infty$.

c) Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \dfrac{1}{2}$.

d) Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Solución:

a) Las dos ramas son siempre continuas, estudiamos su continuidad en $t = 1$: $\lim\limits_{t\to 1^-} I(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} ke^{2t} = ke^2$ y $\lim\limits_{t\to 1^+} I(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{t^2}{3t^2+1} = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow ke^2 = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow k = \dfrac{1}{4e^2}$

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2}{3t^2+1} = \dfrac{1}{3} = 0,3333 \Longrightarrow 33,33\,\%$

c) Sea $k = \dfrac{1}{4e^2} \Longrightarrow I(t) = \dfrac{1}{4e^2}e^{2t} = \dfrac{e^{2t-2}}{4}$ para $t < 1$:

$$I'(t) = \frac{e^{2t-2}}{2} \Longrightarrow I'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$$

d) Sea $I(t)=\dfrac{t^2}{3t^2+1}$ para $t\geq 1$:

$$I'(t)=\frac{2t}{(3t^2+1)^2}\Longrightarrow I'(2)=\frac{4}{169}$$

Problema 3 Considera la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

a) Calcula la derivada primera.

b) Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x=2$.

d) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Solución:

a) $f'(x)=-\dfrac{x-1}{e^x}$

b) $f'(x)=-\dfrac{x-1}{e^x}=0\Longrightarrow x=1$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el $(1,\infty)$

c) $b=f(2)=\dfrac{2}{e^2}$, $m=f'(2)=-\dfrac{1}{e^2}$ la recta tangente es $y-\dfrac{2}{e^2}=-\dfrac{1}{e^2}(x-2)\Longrightarrow$ $y=-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{4}{e^2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

Problema 4 Considera la función $f(x)=-x^2+4x$.

a) Calcula la derivada de $f(x)$.

b) Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

c) Calcula una primitiva de $f(x)$.

d) Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x=1$, $x=3$ y el eje OX de abscisas.

Solución:

a) $f'(x) = -2x + 4$

b) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decreciente en el $(2, \infty)$. Con un máximo local en $(2, 4)$.

c) $F(x) = \int (-x^2 + 4x)\, dx = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + C$

d) Hacemos $f(x) = -x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4 \Longrightarrow f(x)$ no corta el eje de abscisas en el intervalo $[1, 3]$

$$S_1 = \int_1^3 (-x^2 + 4x)\, dx = F(3) - F(1) = \frac{22}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{22}{3}\ u^2$$