Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2022

Problema 1 Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + bx + 2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$, y determine el tipo de extremo que es.

Solución:

a) f es continua en la rama $x < 0$ y también lo es en la rama $x > 0$. Para que sea continua en $\mathbb{R}$ hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3 + bx + 2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{ax} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{a} = \frac{1}{a}$$

$2 = \dfrac{1}{a} \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$ y b puede ser cualquier valor real.

b) En $x = -1 \Longrightarrow f(x) = x^3 + bx + 2 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + b$. Si $x = -1$ es un extremo $\Longrightarrow f'(-1) = 0 \Longrightarrow 3(-1)^2 + b = 0 \Longrightarrow b = -3$.
Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(-1) = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

Problema 2 Calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$, $(a \neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \left(1 - \sin^2 x\right)^{a/x^2} = 2$$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - \sin^2 x\right)^{a/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\cos^2 x\right)^{a/x^2} = [1^\infty]$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln \left(\cos^2 x\right)^{a/x^2} = \ln 2$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln \left(\cos^2 x\right)^{a/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \ln (\cos x)^{2a/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2a \ln(\cos x)}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2a\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2a \tan x}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2a\frac{1}{\cos^2 x}}{2} =$

$-a = \ln 2 \Longrightarrow a = -\ln 2$

Problema 3 Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$

Solución:

Se observa que se puede construir en el numerador la derivada del denominador. Hacemos cambio de variable $t = x^3-3x+2 \Longrightarrow dt = 3(x^2-1)dx \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{3(x^2-1)}dt$ sustituyendo:

$\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx = \int \frac{x^2-1}{t}\cdot\frac{1}{3(x^2-1)}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3-3x+2| + C$

Problema 4 Para la siguiente función $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$

a) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ $(x^2-x-2=0 \Longrightarrow x=-1,\ x=2)$
Asíntotas:

- Verticales:
  - $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = +\infty$$

  - $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = -\infty;\quad \lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-x^2}{x^3-x^2-2x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} - 2x\right) = 1$$

$$y = 2x+1$$

b) $b = f(a) = f(1) = -\frac{1}{2}$. Por otro lado $f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4)}{(x^2 - x - 2)^2}$ y $m = f'(1) = -\frac{9}{4}$

$$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4}(x - 1) \Longrightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}$$