Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2022

Problema 1 Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)+b\sin x-2(e^x-1)}{x^2}=7$$

.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)+b\sin x-2(e^x-1)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x+b\cos x-2e^x}{2x}\overset{b=2}{=}\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a\cos x-2\sin x-2e^x}{2}=\frac{a-2}{2}=7\Longrightarrow a=16 \text{ y } b=2.$$

Problema 2 Halla $a>0$ y $b>0$ sabiendo que la gráfica de la función $f(x):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1,2)$ un punto crítico.

Solución:

$$f(x)=\frac{bx^2}{1+ax^4}\Longrightarrow f'(x)=\frac{2bx(1-ax^4)}{(ax^4+1)^2}$$
$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=2\Longrightarrow f(1)=\dfrac{b}{1+a}=2\Longrightarrow b=2+2a\\ f'(1)=0\Longrightarrow f'(1)=\dfrac{2b(1-a)}{(a+1)^2}=0\Longrightarrow 2b(1-a)=0\end{array}\right.\Longrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} a=1,\ \ b=4\\ a=-1,\ \ b=0\end{array}\right.$$

Problema 3 Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=1+\int_0^x te^t\,dt$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan).

Solución:

$$\int te^t\,dt=\left[\begin{array}{c} u=t\Longrightarrow du=dt\\ dv=e^tdt\Longrightarrow v=e^t\\ \displaystyle\int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=te^t-\int e^tdt=te^t-e^t$$

$$\int_0^x te^t\,dt = te^t - e^t\Big]_0^x = xe^x - e^x + 1$$

$$f(x) = 1 + xe^x - e^x + 1 = xe^x - e^x + 2$$

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x \Longrightarrow f''(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, -1)$ y cóncava $\smile$ en el intervalo $(-1, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(-1, 2 - \dfrac{2}{e}\right)$

Problema 4 Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. (para $x \neq 1$, $x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya grafica pase por el punto $(2, 4)$

Solución:

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx \overset{\text{dividiendo}}{=} \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1} = \\ 2 = A(x+1) + B(x-1) \\ x = 1 \Longrightarrow 2 = 2A \Longrightarrow A = 1 \\ x = -1 \Longrightarrow 2 = -2B \Longrightarrow B = -1 \\ \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{-1}{x+1} \end{array}\right] =$$

$$x + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$F(2) = 2 + \ln 1 - \ln 3 + C = 2 - \ln 3 + C = 4 \Longrightarrow C = 2 + \ln 3$$

$$F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 + \ln 3$$