Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2022

Problema 1 Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ para $(x \neq -1)$ tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

Solución:

La ecuación de la asíntota oblicua es $y-1 = 2(x-1) \Longrightarrow y = 2x-1 \Longrightarrow m = 2$ y $n = -1$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2-x} = a = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1} - 2x\right) = b+2 = -1 \Longrightarrow b = -3$$

$$x = 2, \quad b = -3$$

Problema 2 Considera la función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{36(\sin x - ax)}{x^3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

a) f es continua en las dos ramas hay aplicar las condiciones de continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ((3x-6)e^x) = -6$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(\sin x - ax)}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(\cos x - a)}{3x^2} =$$

$$[\text{con } a = 1] = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(-\sin x)}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{-36\cos x}{6} = -6$$

Luego $a = 1$.

b) En $x=-1=a \Longrightarrow f(x)=(3x-6)e^x \Longrightarrow b=f(-1)=-\dfrac{9}{e}$

$f'(x)=3(x-1)e^x \Longrightarrow m=f'(-1)=-\dfrac{6}{e}$

La recta tangente en su ecuación punto pendiente: $y-b=m(x-a) \Longrightarrow y+\dfrac{9}{e}=-\dfrac{6}{e}(x+1) \Longrightarrow y=-\dfrac{6}{e}x-\dfrac{15}{e}$ en su ecuación explícita.

Problema 3 Sea la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x^3-x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Solución:

a) $f'(x)=12x^2-4x^3=4x^2(3-x)=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=3$

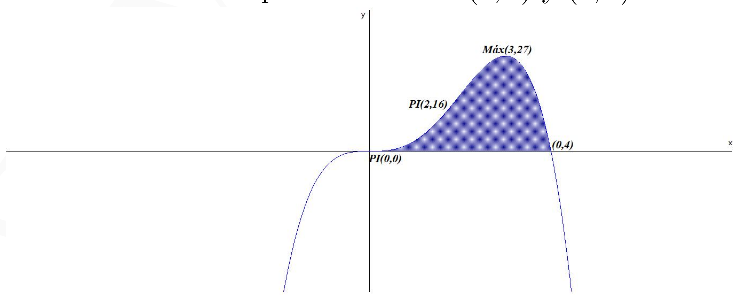
	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,3)$ y decreciente en el intervalo $(3,\infty)$.
La función presenta un máximo relativo en el punto $(3,27)$

b) $f''(x)=24x-12x^2=12x(2-x)=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=2$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\frown$	*cóncava* $\smile$	convexa $\frown$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ y cóncava en el $(0,2)$
La función presenta los puntos de inflexión $(0,0)$ y $(2,16)$.
La función tiene de puntos de corte $(0,0)$ y $(4,0)$



$$S_1 = \int_0^4 (4x^3 - x^4)\, dx = x^4 - \frac{x^5}{5}\bigg]_0^4 = \frac{256}{5}$$

$$S = |S_1| = \frac{256}{5}\ u^2$$

Problema 4 Considera la función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

$$\int (2t + \sqrt{t})\, dt = \int \left(2t + t^{1/2}\right)\, dt = t^2 + \frac{t^3 2}{3/2} = t^2 + \frac{2t\sqrt{t}}{3}$$

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt = t^2 + \frac{2t\sqrt{t}}{3}\bigg]_0^x = x^2 + \frac{2x\sqrt{x}}{3}$$

$x = 1 = a \Longrightarrow b = F(1) = \dfrac{5}{3}$ y $F'(x) = 2x + \sqrt{x} \Longrightarrow m = F(1) = 3$

La recta tangente en su ecuación punto pendiente: $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - \dfrac{5}{3} = 3(x - 1) \Longrightarrow y = 3x - \dfrac{4}{3}$ en su ecuación explícita.