Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Noviembre 2021

Problema 1 *(2 puntos)*Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = O$.

b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A.

Solución:

a) $AX = X \Longrightarrow AX - X = O \Longrightarrow (A - I)X = 0$, llamando $B = A - I \Longrightarrow BX = O$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} (a-1)x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + (a-1)z = 0 \end{cases}$$

b) Se trata de un sistema homogéneo y son siempre compatibles, luego cuando no sea compatible determinado será indeterminado. No obstante se comprobará y se sacarán las soluciones. $|B| = 2a - a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(B) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado. La solución única sería la trivial $x = y = z = 0$.
- Si $a = 0$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

☛ Si $a = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)*Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

a) Estudia el rango de A en función del parámetro a.

b) Indica para que valores se puede calcular la inversa de A.

c) Despeja X de la ecuación matricial.

d) Calcula X para $a = 2$.

Solución:

a) $|A| = -4 + a = 0 \Longrightarrow a = 4$.

☛ Si $a = 4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$.

☛ Si $a \neq 4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{4\}$

c) $XA - 2X = A \Longrightarrow X(A - 2I) = A \Longrightarrow X = A(A - 2I)^{-1}$

d) $X = A(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero ha comprado un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas.

Solución:

Sea x el nº de sacos de la marca A, y el nº de sacos de la marca B y z el nº de sacos de la marca C.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=66 \\ 5x+4y+4z=274 \\ z=2(x+y) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=66 \\ 5x+4y+4z=274 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=12 \\ z=44 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)*Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right),\ B=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \text{ y } C=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX-2B=C$.

Solución:

a) $A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{array}\right)$

b) $AX-2B=C \Longrightarrow X=A^{-1}(C+2B)=$

$$\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{array}\right)\left[\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)+2\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{array}\right)$$

Problema 5 *(2 puntos)*Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

a) Calcula razonadamente el determinante de A^T, es decir, la matriz traspuesta de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $XA + 3A = B$.

Solución:

a) $|A^T| = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 1 - (2 + 0 + 0) = 1$

b) $XA + 3A = B \Longrightarrow XA = B - 3A \Longrightarrow X = (B - 3A)A^{-1}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$