

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Noviembre 2021

Problema 1 (2 puntos) Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Estudie si existe la matriz inversa de B .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|B| = 0 \Rightarrow \nexists B^{-1}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Problema 2 (2 puntos) Se pide:

a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e + 2f & 2f \\ -g & -h - i & -i \\ a & b + c & c \end{vmatrix}$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$,
donde A^T es la matriz traspuesta de A .

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 2d & 2e + 2f & 2f \\ -g & -h - i & -i \\ a & b + c & c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b + c & c \\ d & e + f & f \\ -g & -h - i & -i \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b + c & c \\ d & e + f & f \\ g & h + i & i \end{vmatrix} =$
 $-2 \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ d & f & f \\ g & i & i \end{vmatrix} \right) = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

$$\text{b) } A - \frac{1}{2}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos) Dada la siguiente matriz: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$

- a) Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in \mathbb{R}$.
- b) Para $k = 1$, calcule la inversa de A del apartado anterior.

Solución:

$$\text{a) } A = I + P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A| = -2k^2 - 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ y } k = -\frac{1}{2}.$$

☛ Si $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

☛ Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

☛ Si $k = -\frac{1}{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

Problema 4 (2 puntos) Dadas las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.
- Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I + BX = C_1 C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } |B| &= -4 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{b) } I + BX &= C_1 C_2 \Rightarrow BX = C_1 C_2 - I \Rightarrow X = B^{-1}(C_1 C_2 - I) = \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -7/2 & 5/2 & -1 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

- Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio.
- Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería?
- ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia).

Solución:

Sean x precio de un viaje al Caribe, y precio de un viaje a las Maldivas y z precio de un viaje a Tailandia.

$$\text{a) } \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 12000 \\ 10x + 20z = 13000 \\ 10x + 10y = 7000 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1200 \\ x + 2z = 1300 \\ x + y = 700 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 300\text{€} \\ y = 400\text{€} \\ z = 500\text{€} \end{cases}$$

b) $300 \cdot 0,2 = 60\text{€}$ sería el descuento del 20 % del precio por viaje. al Caribe. Como se han vendido 30 viajes $\implies 30 \cdot 60 = 1800\text{€}$ de pérdida.

c) Hay que repartir 1800€ en 20 viajes a las Maldivas $\frac{1800}{20} = 90\text{€}$ Luego $y = 400 + 90 = 490\text{€}$