

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Noviembre 2021

Problema 1 (2,5 puntos) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m .
- b) Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m + 2/5 \end{array} \right)$, $|A| = -6m^2 - 15m = 0 \Rightarrow m = 0$ y $m = -5/2$.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -5/2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -5/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -15/2 & 0 & -21/10 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 1/2 F_1 \\ F_3 + 2/5 F_1 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -67/4 & -1 & -17/4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 = F_3 \\ F_2 \\ F_3 = F_1 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $m = 0$:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

A la vista de esta solución podemos afirmar que no hay ninguna solución con $x = 0$.

El valor de x es siempre $\frac{2}{5}$

Si $m \neq 0$ y $m \neq -5/2$ sustituimos $x = 0$ en el sistema y tenemos:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -4y + 2z = 0 \\ 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

El sistema formado por las dos primeras ecuaciones es incompatible, luego no hay soluciones al sistema con $x = 0$.

Problema 2 (2,5 puntos) En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución:

Sean x el número de botellas, y el número de garrafas y z el número de bidones.

$$\begin{cases} 50x + 100y + 1000z = 10000 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y + 20z = 200 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \\ z = 7 \end{cases}$$

Problema 3 (2,5 puntos) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$.

Solución:

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = -A^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A^4 X + B &= AC \Rightarrow A^2 A^2 X = AC - B \Rightarrow (-A^{-1})(-A^{-1})X = AC - B \Rightarrow \\ A(-A^{-1})(-A^{-1})X &= A(AC - B) \Rightarrow A(-A^{-1})X = A^2(AC - B) \Rightarrow X = \\ A^2(AC - B) &= \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right] &= \\ \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 4 (2,5 puntos) Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Estudie el rango de la matriz $A - kI$ según los valores de $k \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) Calcule la inversa de $A - kI$ para $k = 0$.

Solución:

$$\text{a) } A - kI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix},$$

$$|A - kI| = (2 - k)(k^2 - 3k + 2) = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ y } k = 1.$$

☛ Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

☛ Si $k = 1$:

$$A - kI = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \quad \left| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

☛ Si $k = 2$:

$$A - kI = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_1 = -2F_2 = -2F_3 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

b) Si $k = 0 \implies A - kI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies (A - kI)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$