Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2021

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -m & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2m & 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 2 & -m \\ 3 & 1 & 0 \\ -2m & 6 & -4 \end{vmatrix} = -2(m^2 + 11m - 12) = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -12$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2m & 6 & 8 \end{vmatrix} = 6 - 6m = 0 \Longrightarrow m = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & -m & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2m & -4 & 8 \end{vmatrix} = 4(m^2 + 8m - 9) = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -9$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -m & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 4 - 4m = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Problema 2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b) (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & 3a \\ 2a & 2a+b \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & 3a \\ 2a & 2a+b \end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=3 \\ b=4 \end{array}\right.$$

$$A^2=3A+4I=3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

b) $A^3=A^2\cdot A=(3A+4I)A=3A^2+4A=3(3A+4I)+4A=13A+12I$

$$A^3=13\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 39 \\ 26 & 38 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=(13A+12I)A=13A^2+12A=13(3A+4I)+12A=51A+52I$$

$$A^5=A^4\cdot A=(51A+52I)A=51A^2+52A=51(3A+4I)+52A=205A-204I$$

$$A^5=205\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+204\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 409 & 615 \\ 410 & 614 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{l} X-2Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} X-2Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} X=\begin{pmatrix} 2 & -1/3 \\ -1/3 & 7/3 \end{pmatrix} \\ \\ Y=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX=XA$ donde $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a+c = 2a \Longrightarrow\ c = 0 \\ 2b+d = a+b \Longrightarrow\ a = b-d \\ c = 2c \Longrightarrow\ c = 0 \\ d = c+d \Longrightarrow\ c = 0 \end{array} \right.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} b-d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.