Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2021) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} 2a = a-1 \\ ac+2b = b-1 \\ 2c = c-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{array}\right.$

b) Para $a = b = c = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b, \quad y = 6x + 8$$

a) $$\left\{\begin{array}{l} f'(-3) = 0 \Longrightarrow -6a + b = 0 \\ m = f'(0) = 6 \Longrightarrow b = 6 \\ f(0) = 6\cdot 0 + 8 = 8 \Longrightarrow c = 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 8 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

b) Si $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1 \Longrightarrow f(x) = 2x^2 + x + 1$:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x}\,dx = \int_1^e \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)\,dx =$$

$$\left.x^2 + x + \ln x\right]_1^e = e^2 + e - 1 \simeq 9,107$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

Solución:

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Asíntotas:

- Verticales:
En $x = 0$:
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{array}\right.$$

- Horizontales: No hay.
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty \quad \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = -\infty$$

- Oblícuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1$$

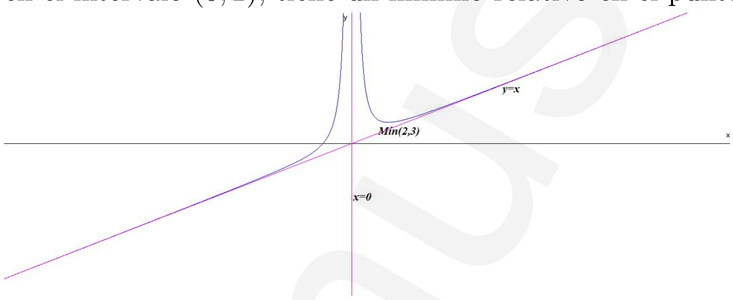
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x \right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = 0 \Longrightarrow y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 2)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(2, 3)$.



Problema 4 *(2 puntos)* En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

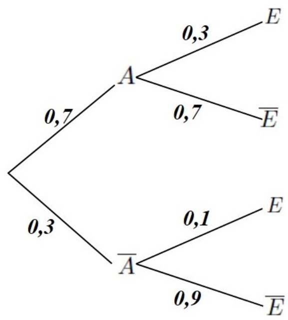
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Solución:

A : proximidad, $\overline{A}$: no proximidad, E : ecológica y $\overline{E}$: no ecológica.

a) $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|\overline{A})P(\overline{A}) =$ $0,7 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,76$

b) $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) =$ $P(A) + (1 - P(\overline{E})) - P(E|A)P(A) =$ $0,7 + 1 - 0,76 - 0,3 \cdot 0,7 = 0,73$



Problema 5 *(2 puntos)* El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 30$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,383$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (30 - 4,383; 30 + 4,383) = (25,617; 34,383)$$

b) $\mu = 28$ y $n = 10$:

$$P\left(28 \le \overline{X} \le 30\right) = P\left(\frac{28-28}{10/\sqrt{10}} \le \overline{X} \le \frac{30-28}{10/\sqrt{10}}\right) =$$

$$P(0 \le Z \le 0,63) = P(Z \le 0,63) - P(Z \le 0) = 0,7357 - 0,5 = 0,2357$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2021) Selectividad-Opción B

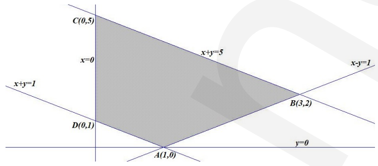
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x : nº de Ha de trigo e y : nº de Ha de cebada.
La región factible es:

$$\begin{cases} x+y\leq 5 \\ x+y\geq 1 \\ x-y\leq 1 \\ x,y\geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(1,0)$, $B(3,2)$, C(0,5) y $D(0,1)$
La función objetivo es $f(x,y)=200x+60y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(1,0)=200 \\ f(3,2)=720 \\ f(0,5)=300 \\ f(0,1)=60 \end{cases} \Longrightarrow$$ El máximo beneficio será de 720 euros que se obtiene plantando 3 Ha de trigo y 2 Ha de cebada.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A|=-a^2+3a-2=0 \Longrightarrow a=1, \ \ a=2$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{1,2\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = -1 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = -2 \\ z = -1/2 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & \text{si} & x \le 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

b) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x^2 + ax - \dfrac{1}{9}\right) = -\dfrac{1}{9} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = -\dfrac{1}{9} \\ \\ f(0) = -\dfrac{1}{9} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

La función es continua en $x = 0$ pero no lo es en $x = 3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$, que es el único punto del dominio en el que hay duda.

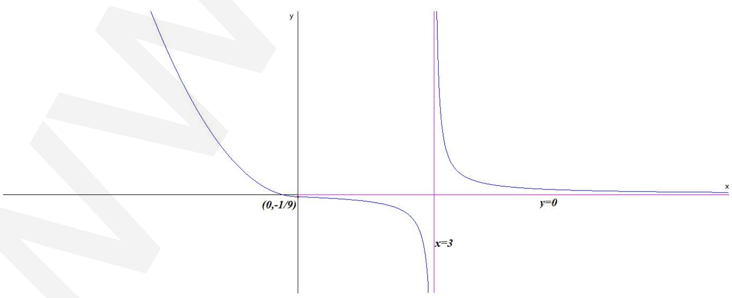
$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ \\ -\dfrac{x^2+2x+9}{(x^2-9)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Tenemos que $f'(0^-)=a$ y $f'(0^+)=-\dfrac{1}{9} \Longrightarrow a=-\dfrac{1}{9}$. Para este valor la función sería derivable en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{3\}$.

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Asíntotas:
En la rama $x\le 0$ no hay asíntotas, se trata de un polinomio.
En la rama $x>0$

- Verticales:
  En $x=3$:
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-}\dfrac{x+1}{x^2-9}=\left[\dfrac{4}{0^-}\right]=-\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+}\dfrac{x+1}{x^2-9}=\left[\dfrac{4}{0^+}\right]=+\infty \end{cases}$$
- Horizontales: $y=0$.
  $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x+1}{x^2-9}=0$$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



Problema 4 *(2 puntos)* Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C)=0,4$, $P(D)=0,6$ y $P(C\cup D)=0,8$. Calcule:

a) $P(C|D)$.

b) $P(\overline{C\cap D}|C)$.

Solución:

a) $P(C|D) = \dfrac{P(C\cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(C)+P(D)-P(C\cup D)}{P(D)} = \dfrac{0,4+0,6-0,8}{0,6} = \dfrac{1}{3} = 0,333$

b) $P(\overline{C\cap D}|C) = \dfrac{P(\overline{C\cap D}\cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C)-P(C\cap D)}{P(C)} = \dfrac{0,4-0,2}{0,4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

Problema 5 *(2 puntos)* Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

Solución:

$$N(\mu; 300)$$

a) $E = 100$, $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{300}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96\cdot 300}{100}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 3000$ y $n = 50$

$$P\left(\overline{X} \geq 2700\right) = P\left(\overline{X} \geq \frac{2700-3000}{300/\sqrt{50}}\right) =$$

$P(Z \geq -7,07) = 1-P(Z \leq -7,07) = 1-(1-P(Z \leq 7,07)) = 1-(1-1) = 1$