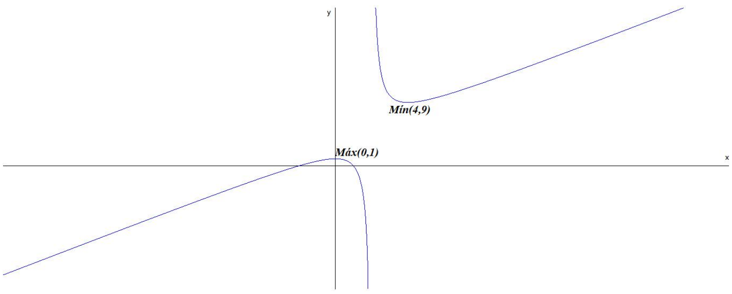
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Mayo 2021

Problema 0.1 Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$.
La función tiene un máximo local en el punto $(0, 1)$ y un mínimo en el punto $(4, 9)$



Problema 0.2 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 5x + 6}$

a) ¿En qué puntos es discontinua?

b) ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

c) Calcular los dos límites laterales en $x = -3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

a) Dado que es un cociente de polinomios sólo puede haber discontinuidades en los puntos que anulan el denominador.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -3, \ \ x = -2$$

Estudiamos la continuidad en estos puntos:

- ☛ En $x = -3$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

  En este caso hay una asíntota y se trata de una discontinuidad no evitable (hay un salto)

- ☛ En $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{2}{2x+5} = 2$$

  En este caso los límites laterales coinciden pero no existe el valor de la función en $x = -2$ por lo que hay un agujero y se trata de una discontinuidad evitable.

b) En el caso de $x = -3$ no podemos encontrar un valor obligue a las dos ramas a unirse, dado que hay un salto. Pero en $x = -2$ si se podría hacer imponiendo $f(-2) = 2$, lo que sería una extensión por continuidad y quedaría la función g:

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} & \text{si} & x \neq -2 \\ 2 & \text{si} & x = 2 \end{array} \right.$$

La función g es continua en $R - \{-2\}$

c) Este apartado está desarrollado en el apartado a)

Problema 0.3 Dada la función: $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} ax^2 + 2x - 1 & \text{si} & x \leq -1 \\ x^2 - 5 & \text{si} & -1 < x \leq 3 \\ \frac{b+x}{3x-2} & \text{si} & x > 3 \end{array} \right.$
determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -1$ y en $x = 3$.
Solución:

- ☛ En $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} (ax^2 + 2x - 1) = a - 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} (x^2 - 5) = -4$$

  $a - 3 = -4 \Longrightarrow a = -1$

☛ En $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 5) = 4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{b + x}{3x - 2} = \frac{b + 3}{7}$$

$$4 = \frac{b + 3}{7} \Longrightarrow b = 25$$

Problema 0.4 Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 5}{2x^2 + 4x - 30}$

a) ¿En qué puntos es discontinua?

b) ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

c) Calcular los dos límites laterales en $x = 3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

a) Dado que es un cociente de polinomios sólo puede haber discontinuidades en los puntos que anulan el denominador.

$$2x^2 + 4x - 30 = 0 \Longrightarrow x = -5, \;\; x = 3$$

Estudiamos la continuidad en estos puntos:

☛ En $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x + 5}{2x^2 + 4x - 30} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x + 5}{2x^2 + 4x - 30} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty$$

En este caso hay una asíntota y se trata de una discontinuidad no evitable (hay un salto)

☛ En $x = -5$

$$\lim_{x \longrightarrow -5} \frac{x + 5}{2x^2 + 4x - 30} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{1}{4x + 4} = -\frac{1}{16}$$

En este caso los límites laterales coinciden pero no existe el valor de la función en $x = -5$ por lo que hay un agujero y se trata de una discontinuidad evitable.

b) En el caso de $x = 3$ no podemos encontrar un valor obligue a las dos ramas a unirse, dado que hay un salto. Pero en $x = -5$ si se podría hacer imponiendo $f(-5) = -\frac{1}{16}$, lo que sería una extensión por continuidad y quedaría la función g:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} & \text{si} \quad x \neq -5 \\ -\frac{1}{16} & \text{si} \quad x = -5 \end{cases}$$

La función g es continua en $R - \{3\}$

c) Este apartado está desarrollado en el apartado a)

Problema 0.5 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2a}{x-5} & \text{si} & x \leq 2 \\ x^2 - 5 & \text{si} & 2 < x \leq 4 \\ x^2 + 2x - b & \text{si} & x > 4 \end{cases}$
determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = 2$ y en $x = 4$.
Solución:

☛ En $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x+2a}{x-5} = -\frac{2+2a}{3}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^2 - 5) = -1$$

$-\dfrac{2+2a}{3} = -1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

☛ En $x = 4$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} (x^2 - 5) = 11$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} (x^2 + 2x - b) = 24 - b$$

$11 = 24 - b \Longrightarrow b = 13$