Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2021

Problema 0.1 A la hora de estudiar la relación entre el beneficio de una empresa y el producto vendido, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en miles de euros, si se han vendido x toneladas de producto ese mes. Si un mes se venden como mucho 10 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es de $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800$ miles de euros. Si se venden más de 10 toneladas, el beneficio mensual se considera que es constante e igual a 1805000 euros.

a) Obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x.

b) ¿Es el beneficio una función continua de la cantidad de producto vendido?

c) Estudia y representa gráficamente la función f.

d) ¿Cuál es el beneficio mensual mínimo? ¿Puede llegar algún mes a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros?

Solución:

a) $b(x) = \begin{cases} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 & \text{si} \quad 0 < x \leq 10 \\ 1805 & \text{si} \quad x > 10 \end{cases}$

b) Hay que estudiar la continuidad en $x = 10$

$$\lim_{x \longrightarrow 10^-} b(x) = \lim_{x \longrightarrow 10^-} \left(10x - \frac{5x^2}{4} + 1800\right) = 1775$$

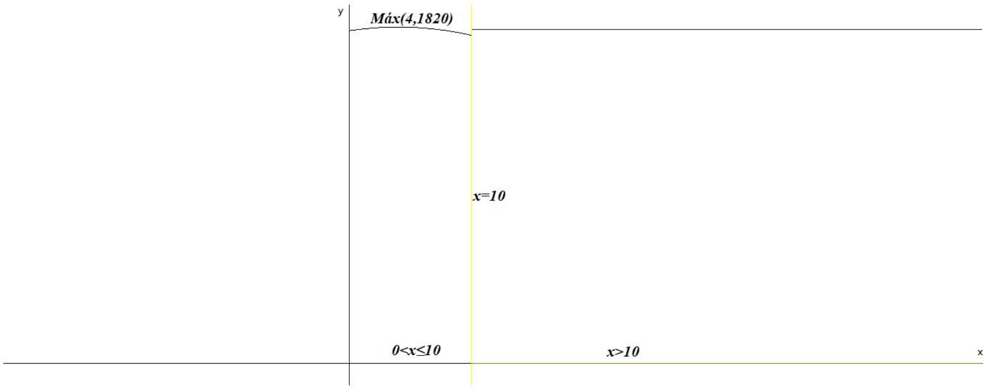
$$\lim_{x \longrightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 10^+} (1805000) = 1805$$

Luego f no es continua en $x = 10$, hay un salto. La discontinuidad en ese punto no es evitable.
La función f es continua en el intervalo $(0, 10) \cup (10, \infty)$

c) El $\text{Dom}(b) = (0, \infty)$. Si $x = 0 \Longrightarrow (0, 1800)$ punto de corte con el eje de ordenadas y no corta al eje de abscisas.
$b'(x) = \begin{cases} 10 - \frac{5x}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 10 \\ 0 & \text{si} \quad x > 10 \end{cases} \Longrightarrow 10 - \frac{5x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 4$

	$(0, 4)$	$(4, 10]$
$b'(x)$	$+$	$-$
$b(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo (0,4) y decrece en el (4,10] a partir de $x = 10$ la función es constante. Luego hay un máximo local en el punto (4,1820)



d) El beneficio mínimo estaría en $b(0) = 1800$ o en $b(10) = 1775$ luego el beneficio mínimo se produce cuando se venden exactamente 10 Tm por 1775000€. El valor máximo se obtiene cuando se venden 4 Tm por 1820000€ y, por tanto nunca se llega a unos beneficios de 1900000€, pero si a unos beneficios de 1815000€.

Problema 0.2 Dada la función $f(x) = \dfrac{9}{x} - \dfrac{18}{x^2} - 1$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1\right) = 9\ln x - x + \frac{18}{x} + C$

$F(1) = 17 + C = 20 \Longrightarrow C = 3 \Longrightarrow F(x) = 9\ln x - x + \dfrac{18}{x} + 3$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 9x - 18}{x^2}$

I. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

II. Puntos de corte con OY: no hay
Puntos de corte con $OX: -x^2 + 9x - 18 = 0 \Longrightarrow (3,0)$ y $(6,0)$

III. Signo:

	$(-\infty,3)$	$(3,6)$	$(6,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

IV. Simetría: No hay

V. Asíntotas:

✍ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = \left[\ \frac{-18}{0^+} \ \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = \left[\ \frac{-18}{0^+} \ \right] = -\infty$$

✍ Horizontales: $y = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = -1$$

✍ Oblicuas: No hay por haber horizontales

VI. Monotonía: $f'(x) = \dfrac{9(4 - x)}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

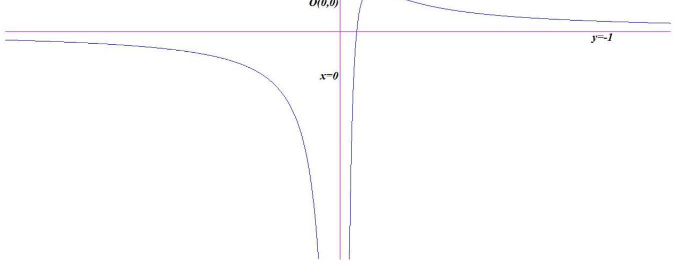
La función crece en el intervalo: $(0, 4)$.
La función decrece en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $\left(4, \dfrac{1}{8}\right)$.

VII. Curvatura: $f''(x) = \dfrac{18(x - 6)}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 6$

	$(-\infty, 6)$	$(6, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función convexa en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$.
La función cóncava en el intervalo: $(6, \infty)$.
La función tiene un punto de inflexión en $(6, 0)$.

VIII. Representación gráfica:



IX. La función corta al eje OX en $x = 3$ y en $x = 6$ ambos puntos dentro del intervalo de integración $[1, 12]$, luego tendremos tres áreas S_1 entre 1 y 3, S_2 entre 3 y 6 y S_3 entre 6 y 12.

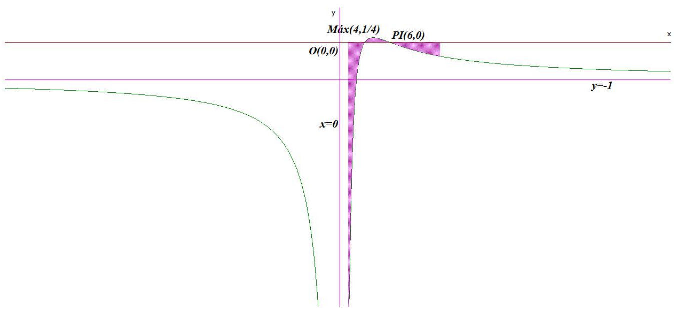
$$F(x) = \int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1\right) dx = 9\ln|x| - x + \frac{18}{x}$$

$$S_1 = \int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = 9\ln 3 - 14 \simeq -4,112$$

$$S_2 = \int_3^6 f(x)\,dx = F(6) - F(3) = 9\ln 2 - 6 \simeq 0,238$$

$$S_3 = \int_6^{12} f(x)\,dx = F(12) - F(3) = 9\ln 2 - \frac{15}{2} \simeq -1,262$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{31}{2} - 9\ln 3 \simeq 5,612\ u^2$$



Problema 0.3 Dada la función $f(x) = \dfrac{a}{x+1}$, se pide:

a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10\ln(2)$, donde F denota una primitiva de f.

b) Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{a}{x+1}\,dx = a\ln(x+1) + C$
$F(0) = C = 0$ y $F(1) = a\ln 2 = 10\ln 2 \Longrightarrow a = 10$. Luego $F(x) = 10\ln(x+1)$

b) Tenemos $f(x) = \dfrac{10}{x+1}$

1. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

2. Puntos de corte con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 10)$
   Puntos de corte con OX: no hay

3. Signo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. Simetría: No hay

5. Asíntotas:

   ✍ Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{10}{x+1} = \left[\frac{10}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = \left[\frac{10}{0^+} \right] = +\infty$$

   ✍ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{10}{x+1} = 0$$

   ✍ Oblicuas: No hay por haber horizontales

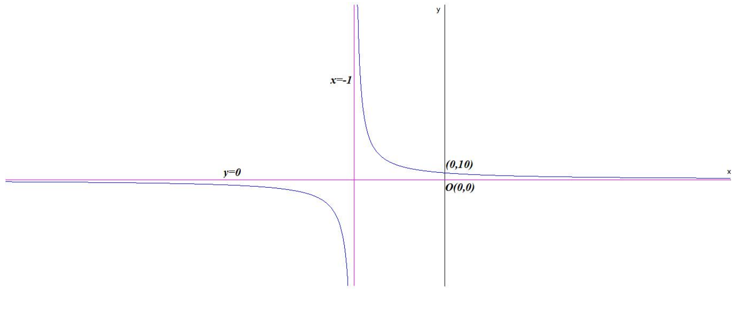
6. Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{10}{(x+1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay extremos. Como $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ la función es siempre decreciente en $\mathbb{R} - \{-1\}$

7. Curvatura: $f''(x) = \dfrac{20}{(x+1)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

   La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty, -1)$.
   La función es convexa en el intervalo: $(-1, \infty)$.

8. Representación gráfica:

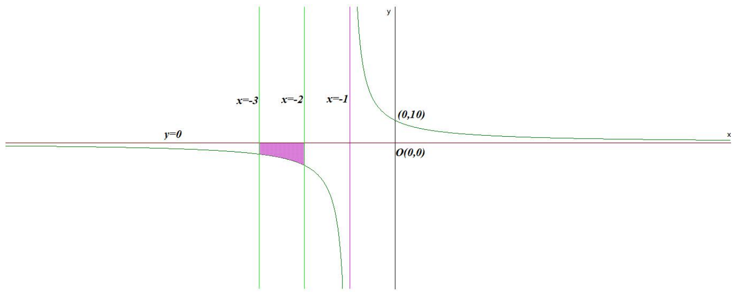


9.

$$F(x) = \int \frac{10}{x+1}\,dx = 10\ln|x+1|$$

$$S_1 = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx = F(-2) - F(-3) = 10\ln 1 - 10\ln 2 = -10\ln 2 \simeq -6,9315$$

$$S = |S_1| = 10\ln 2 \simeq 6,9315\ u^2$$



Problema 0.4 A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\dfrac{1}{100}(-x^2+100x-1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1-\dfrac{120}{x}$.

a) Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$.

b) ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

Solución:

a) La función beneficio $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}(-x^2+100x-1600) & \text{si} \quad 0 < x \le 100 \\ 1-\dfrac{120}{x} & \text{si} \quad x > 100 \end{cases}$

Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (0,\infty)$
- ☛ Continuidad: las dos ramas son continuas, estudiamos en x=100

$$\lim_{x\longrightarrow 100^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 10^-} \frac{1}{100}(-x^2+100x-1600) = -16$$

$$\lim_{x\longrightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 10^+} \left(1 - \frac{120}{x}\right) = -0,2$$

Luego f no es continua en $x = 100$, hay un salto. La discontinuidad en ese punto no es evitable.

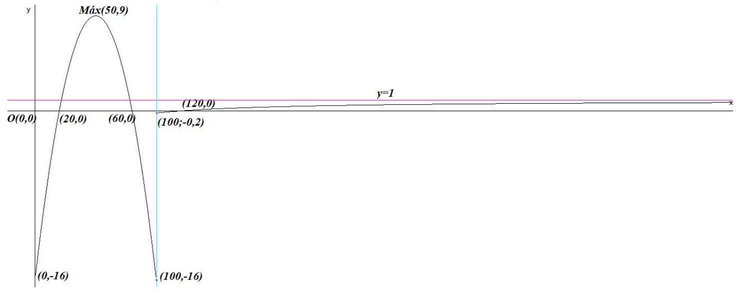
- La rama $0 < x \leq 100$ tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas: $\frac{1}{100}(-x^2 + 100x - 1600) = 0 \Longrightarrow x = 20$ y $x = 60$, es decir, los puntos $(20, 0)$ y $(60, 0)$. Con el eje de ordenadas tiene $(0, f(0)) = (0, -16)$.
  La rama $x > 100$ tiene un punto de corte con el eje de abscisas $1 - \dfrac{120}{x} = 0 \Longrightarrow x = 120$, es decir, el punto $(120, 0)$ y no tendría corte con el eje de ordenadas.
- Asíntotas:
  En la rama $0 < x \leq 100$ no hay asíntotas por tratarse de un polinomio.
  En la rama $x > 100$ no hay verticales por ser $x > 0$, hay una horizontal en $y = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(1 - \frac{120}{x}\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x - 120}{x}\right) = 1$$

  No habría oblicuas al haber horizontales.
- Monotonía: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}(-2x + 100) & \text{si} \quad 0 < x \leq 100 \\ \dfrac{120}{x^2} & \text{si} \quad x > 100 \end{cases}$
  En la rama $0 < x \leq 100 \Longrightarrow -2x + 100 = 0 \Longrightarrow x = 50$

	$(0, 50)$	$(50, 100]$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

  La función crece en el intervalo $(0, 50)$ y decrece en $(50, 100]$ con un máximo local en $(50, 9)$
  En la rama $x > 100$ es $f'(x) > 0\ \forall x \in (100, \infty) \Longrightarrow f$ es creciente en toda la rama.
- La rama $0 < x \leq 100$ tenemos $(0, f(0)) = (0, -16)$ y $(100, f(100^-)) = (100; -16)$. Y en la rama $x > 100$ tenemos $(100; f(100^+)) = (100; -0,2)$
- Representación gráfica:



b) Por los datos obtenidos en el apartado anterior hay que fabricar 50 Tm para obtener el máximo beneficio de 9000000€.
El beneficio será positivo siempre que fabrique entre 20 y 60 Tm.

Problema 0.5 Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes en gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

a) Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuantos gigabytes se han transferido? ¿Cual es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Solución:

a) La función coste $f(x) = \begin{cases} 25 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ 25 + 10(x-2) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \Longrightarrow$

$f(x) = \begin{cases} 25 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ 10x + 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Estudiamos su continuidad en $x = 2$, ya que las ramas son continuas:

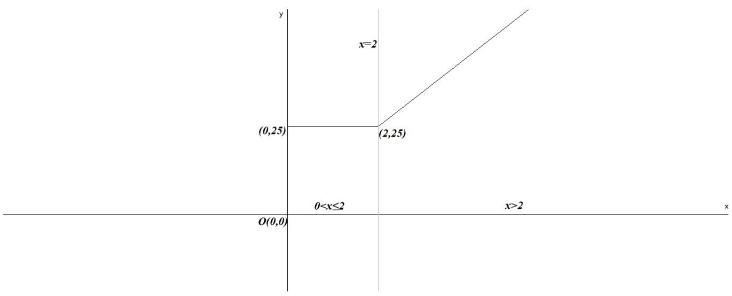
$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} 25 = 25$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (10x + 5) = 25$$

$$f(2) = 25$$

Luego f es continua en $x = 2 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) las ramas son dos rectas:



Si el coste de la trasferencia ha sido 225 céntimos $f(x) = 10x + 5 = 225 \Longrightarrow x = 22$ gigabyte.
El coste mínimo es de 25 céntimos y no hay coste máximo.

Problema 0.6 Dada la función $f(x) = \dfrac{6}{x+1} - 2$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{6}{x+1} - 2\right) = 6\ln|x+1| - 2x + C$
$F(0) = C = 2 \Longrightarrow F(x) = 6\ln|x+1| - 2x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{6}{x+1} - 2 = \dfrac{-2x+4}{x+1}$

i. $\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$

ii. Puntos de corte con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 4)$
Puntos de corte con OX : $-2x + 4 = 0 \Longrightarrow (2, 0)$

iii. Signo:

	$[0, 2)$	$(2, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$

iv. Simetría: No hay

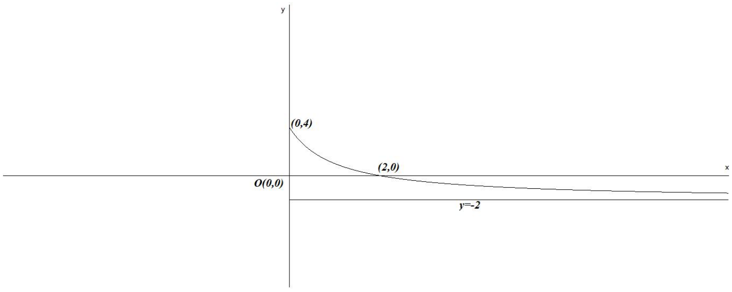
v. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1 \notin [0, \infty) \Longrightarrow$ No hay
- Horizontales: $y = -2$ ya que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x+4}{x+1} = -2$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales

vi. Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay extremos. Como $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in [0, \infty) \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio.

vii. Curvatura: $f''(x) = \dfrac{12}{(x+1)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de inflexión y $f''(x) > 0$ en todo el dominio, por lo que es siempre convexa $\frown$.

viii. Representación gráfica:



La función corta al eje OX en $x = 2$ punto dentro del intervalo de integración $[0,3]$, luego tendremos dos áreas S_1 entre 0 y 2 y S_2 entre 2 y 3

$$F(x) = \int \left(\frac{6}{x+1} - 2\right) dx = 6\ln|x+1| - 2x$$

$$S_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 6\ln 3 - 4 - 0 = 6\ln 3 - 4$$

$$S_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = F(3) - F(2) = 6\ln 4 - 6 - (6\ln 3 - 4) = -6\ln\left(\frac{3}{4}\right) - 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 6\ln 3 - 4 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2 = 12\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \simeq 2,86558\ u^2$$