Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2021

Problema 0.1 El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x - 8}{x^2 + 4x + 4}$$

donde $x \in [0, 60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) El precio de la acción a las nueve y media.

b) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

Solución:

a) $P(30) = \dfrac{3059}{256} = 11,9492$

b) $P'(x) = \dfrac{2(x - 10)}{(x + 2)^3} = 0 \Longrightarrow x = 10.$

	$[0, 10)$	$(10, 60]$
$P'(x)$	$-$	$+$
$P(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

$P(x) = 12 \Longrightarrow 12 - \dfrac{2x - 8}{x^2 + 4x + 4} = 12 \Longrightarrow x = 4.$

Tenemos que cuando $x = 0 \Longrightarrow P(0) = 14$ y la función decrece hasta $x = 4$ donde la función vale $P(4) = 12$ y sigue decreciendo hasta $x = 10$ donde valor es 11,9167, luego el valor es superior a 12 en el intervalo $[0, 4)$.

Por otra parte la función empieza a crecer a partir de $x = 10$ y tenemos que $P(60) = 11,97$, es decir, la función no llega a superar 12 en ningún punto del intervalo $(10, 60]$.

En conclusión el intervalo pedido será $[0, 4)$.

c) El valor máximo se dará en el momento de partida $(0, 14)$ y el mínimo en el punto $(10; 11,9167)$.

Problema 0.2 Se pide:

a) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un maximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.

b) Calcular:

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$ y $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(-2) = 0 \Longrightarrow 12a - 4b + 3 = 0 \\ f(-2) = -6 \Longrightarrow -8a + 4b - 6 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3/4 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

$f(x) = \dfrac{3}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - 6$
Comprobamos que en $x = -2$ hay un máximo:

$$f''(x) = 6ax+2b = 6\frac{3}{4}x+6 = \frac{9}{2}x+6,\ \ f''(-2) = -9+6 = -3 < 0 \text{ y } f'(-2) = 0$$

$$\Longrightarrow x = -2 \text{ es un máximo}$$

b)

$$\int \frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = 8x^2+1 \\ dt = 16xdx \\ dx = \frac{dt}{16x} \end{array} \right] = \int \frac{5x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{16x} = \frac{5}{16} \int t^{-1/2}\, dt =$$

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} + C$$

$$\int 3xe^{-4x^2} dx = \left[\begin{array}{c} t = -4x^2 \\ dt = -8xdx \\ dx = \frac{dt}{-8x} \end{array} \right] = \int 3xe^t \frac{dt}{-8x} = -\frac{3}{8} \int e^t dt = -\frac{3}{8}e^t + C = -\frac{3}{8}e^{-4x^2} + C$$

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx = \left[\frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} + \frac{3}{8}e^{-4x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{8}(7+3e^{-4}) = 0,88$$

Problema 0.3 Se pide:

a) Calcular la derivada de $f(x) = e^{3x^2-5x}$

b) Calcular: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$

c) Calcular: $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$

Solución:

a) $f(x) = e^{3x^2-5x} \Longrightarrow f'(x) = (6x-5)e^{3x^2-5x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{16x^2}} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

c) $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = x^3 - \frac{\sqrt{4x+1}}{2}\Bigg]_0^2 = \frac{13}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$

Nota: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = 4x+1 \\ dt = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array}\right] = \int \frac{1}{4\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\sqrt{t} = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$

Problema 0.4 El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

a) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

Solución:

a) $C(5) = \dfrac{9}{2} = 4,5$ €

b) $\dfrac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) < 4 \Longrightarrow x^2 - 16x + 60 < 0 \Longrightarrow x \in (6, 10)$, es decir entre 6000 y 10000 unidades.

Nota: $x^2 - 16x + 60 = 0 \Longrightarrow x = 6$ y $x = 10$

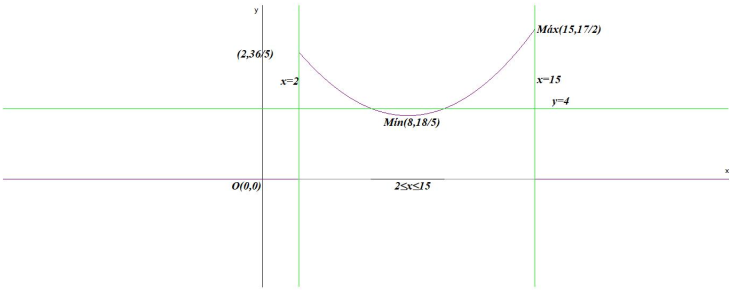
$[2, 6)$	$(6, 10)$	$(10, 12]$
$+$	$-$	$+$

$\Longrightarrow (6, 10)$

c) $C'(x) = \dfrac{x-8}{5} = 0 \Longrightarrow x = 8$ y

	$[2,8)$	$(8,12]$
$C'(x)$	$-$	$+$
$C(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $[2,8)$ y crece en $(8,12]$ con un mínimo local en $(8,18/5)$.
Como $C(2) = 7,2$ y $C(15) = 8,5$ la función presenta un máximo en el punto $(15,17/2)$.
El mínimo se alcanza con una producción de 8000 unidades a un precio de $\frac{18}{5} = 3,6$ € y el máximo cuando se producen 15000 unidades a un precio de $\frac{17}{2} = 8,5$ €



Problema 0.5 Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

a) Dominio de f.

b) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) < 0$?

c) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) Máximos y mínimos relativos de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f(x) < 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} < 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, 1)$
Nota: $x^2 - 4x + 12 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$-$	$+$

$\Longrightarrow x \in (-\infty, 1)$

c) Asíntotas:

- Verticales: en $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \left[\ \frac{9}{0^-}\ \right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \left[\ \frac{9}{0^+}\ \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas:$y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-4x+12}{x^2-x} = 1$$

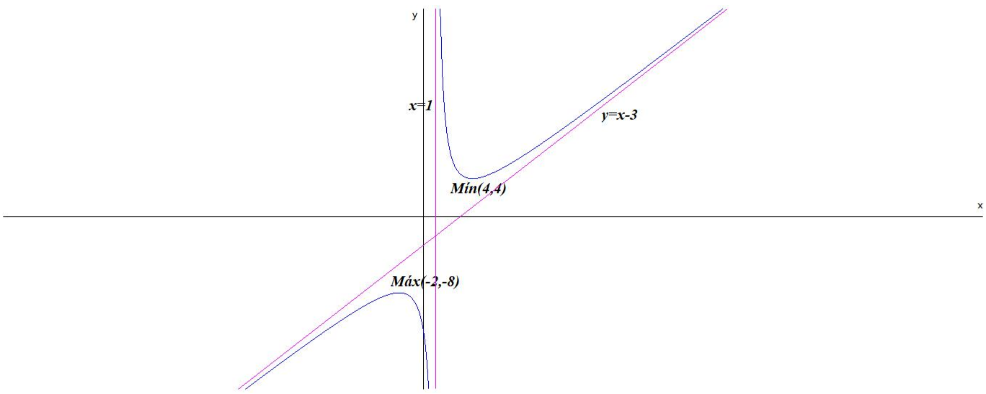
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-3x+12}{x-1} = -3$$

$$y = x - 3$$

d) $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 4$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función f crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.
La función f decrece en el intervalo $(-2, 1) \cup (1, 4)$ (Hay que quitar $x = 1$ en el intervalo (-2,4) por no estar en el dominio)
La función f tiene un máximo en el punto $(-2, -8)$.
La función f tiene un mínimo en el punto $(4, 4)$.



Problema 0.6 Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & \text{si} \quad -1 \le x \le 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f.

b) Calcular: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x)$

c) Calcular: $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Las tres ramas son continuas, estudiamos en $x = -1$ y en $x = 4$. Analizamos la continuidad de la función en estos puntos:

- ☛ Continuidad en $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \left(x^3 - 4x^2 + 2x - 10\right) = -17$$

Luego f es no continua en $x = -1$, hay un salto. La discontinuidad en ese punto no es evitable.

- ☛ Continuidad en $x = 4$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^-} \left(x^3 - 4x^2 + 2x - 10\right) = -2$$

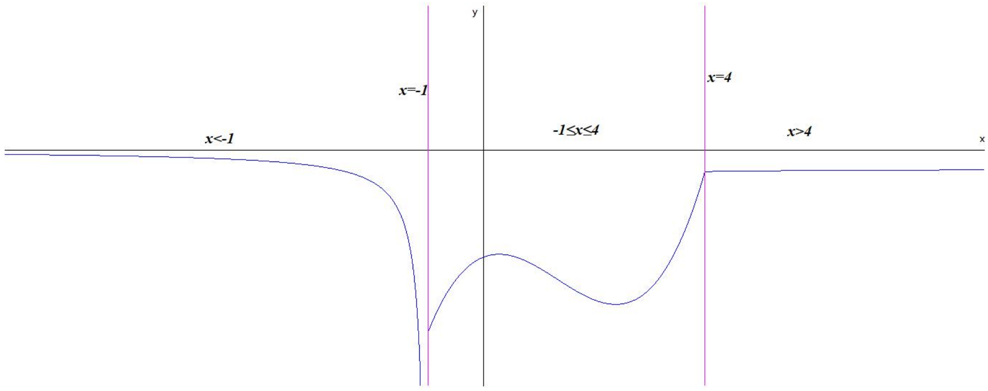
$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} \left(\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x\right) = -2$$

$$f(4) = -2$$

Luego f es continua en $x = 4$.

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x) = [\infty - \infty] =$
$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{(\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{4x^2 - 7x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x} =$
$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{4x^2 - 7x} + 2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{4x^2} + 2x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{-7x}{4x} =$
$-\dfrac{7}{4}$

c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^3 - 4x^2 + 2x - 10)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + x^2 - 10x\right]_1^2 =$
$-\dfrac{151}{12} = -12,583$


y
x=-1
x=4
x<-1
-1≤x≤4
x>4
x