Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2021

Problema 0.1 Se considera Ia función $f(x) = x^3 - 9x + 2$

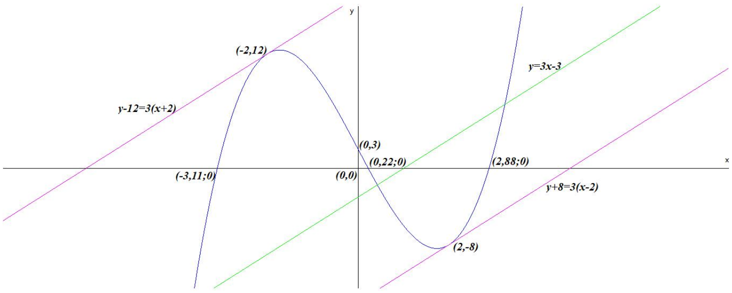
a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 9 \Longrightarrow m = f'(a) = 3a^2 - 9 = 3 \Longrightarrow a = \pm 2 \Longrightarrow f(2) = -8 \Longrightarrow y + 8 = 3(x - 2)$ y $f(-2) = 12 \Longrightarrow y - 12 = 3(x + 2)$:



b) Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

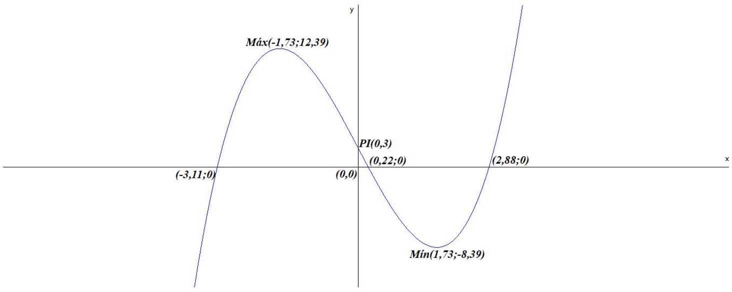
	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$ y deceece en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
La función tiene un máximo en el punto $(-\sqrt{3}, 2+6\sqrt{3}) = (-1,73; 12,39)$ y un mínimo en el punto $(\sqrt{3}, 2 - 6\sqrt{3}) = (1,73; -8,39)$

Curvatura: $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en el punto $(0, 3)$.



c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int (x^3 - 9x + 2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C$

Problema 0.2 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

b) Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

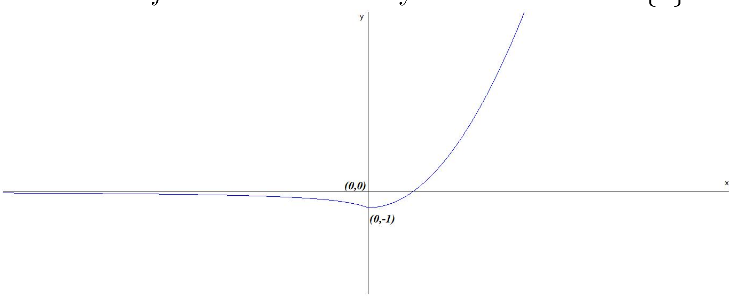
Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

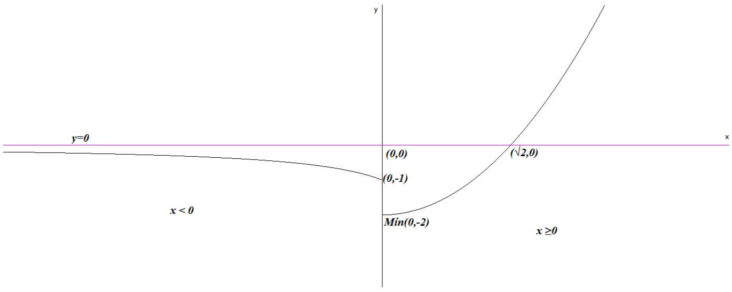
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 + a) = a$$

Luego $a = -1$.
$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0^-) = -1 \\ f(0^+) = 0 \end{cases} \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.
Para $a = 0$ f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.



b) Para $a = -2 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ La función no es continua en $x = 0$ hay un salto y, por tanto, no es derivable en ese punto.



En la rama $x < 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

Luego f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y no tiene puntos de inflexión.
En esta rama habría una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.
En la rama $x \geq 0$: Empezaría en el punto $(0, f(0)) = (0, -2)$ $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \in [0, \infty) \Longrightarrow f$ es creciente en el intervalo $[0, \infty)$ con un mínimo relativo en $(0, -2)$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow f \text{ cóncava en } [0, \infty) \quad \smile$$

en esta rama tampoco habría puntos de inflexión.

0.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.3 Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) Determine los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (2, 36)

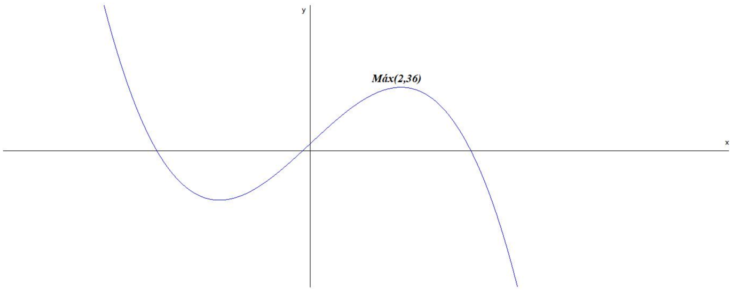
b) Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos. relativos.

c) Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx + 4 \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

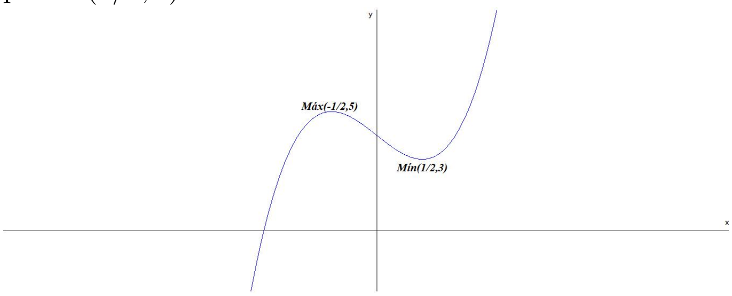
$$\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 36 \Longrightarrow 8a + 2b = 32 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 24 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = -2x^3 + 24x + 4$$



b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 4 \Longrightarrow f'(x) = 12x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$ y deceece en el intervalo $(-1/2, 1/2)$.
La función tiene un máximo en el punto $(-1/2, 5)$ y un mínimo en el punto $(1/2, 3)$



c) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int (4x^3 - 3x + 4)\,dx = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$

$$F(2) = 16 - 6 + 8 + C = 10 \Longrightarrow C = -8 \Longrightarrow F(x) = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x - 8$$

Problema 0.4 Se pide:

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 e^{3x}, \quad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

b) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2+2x+3$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) Derivadas:

- $f(x) = (-5 + x^2)^2 e^{3x} \Longrightarrow f'(x) = 2(-5 + x^2)(2x)e^{3x} + (-5 + x^2)^2 3e^{3x} =$
  $(-5+x^2)(2x)e^{3x}\left[4x + 3(-5 + x^2)\right] = (-5+x^2)(3x^2+4x-15)e^{3x} + C$
- $g(x) = \dfrac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2} = \dfrac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}(1 - x^2) - (-2x)\ln(x^3 - 5x)}{(1 - x^2)^2} =$
  $\dfrac{-3x^4 + 8x^2 - 5 + 2x(x^3 - 5x)\ln(x^3 - 5x)}{(x^3 - 5x)(1 - x^2)^2}$

b) Calculamos los puntos de corte de h con el eje de abscisas: $h(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$, que serán los límites de integración.

$$S_1 = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\Big]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{32}{3} \simeq 10,67\ u^2$$