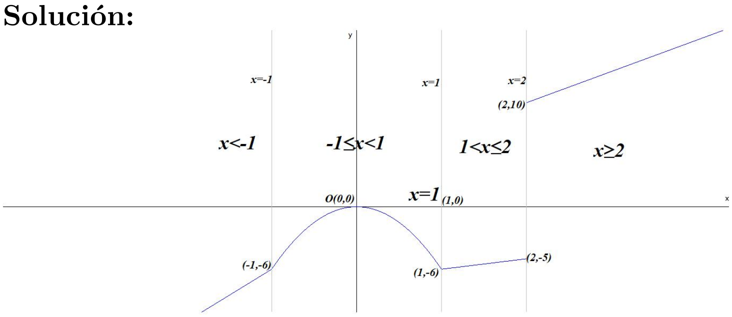
# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

**Febrero 2021**

**Problema 0.1** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5x-1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -6x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ x-7 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x+4 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
**Solución:**




En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

**Problema 0.2** Calcular $a$ y $b$ para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -ax^2 + 2bx - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 + 3bx - 5a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

**Solución:**

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (-ax^2 + 2bx - 1) = -a + 2b - 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (2x^2 + 3bx - 5a) = 2 + 3b - 5a$$

$$-a + 2b - 1 = 2 + 3b - 5a \Longrightarrow 4a - b = 3$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2ax + 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x + 3b & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = -2a+2b$; $f'(1^+) = 4+3b \Longrightarrow -2a+2b = 4+3b \Longrightarrow -2a-b = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a - b = 3 \\ -2a - b = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1/6 \\ b = -11/3 \end{array} \right.$$

**Problema 0.3** Calcular $a$ y $b$ para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{2x-a}{3} & \text{si} & x < -1 \\ x - b & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ \frac{ax+3}{2} & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right.$$

**Solución:**

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{2x-a}{3} = \dfrac{-2-a}{3} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (x-b) = -1-b \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-2-a}{3} = -1-b \Longrightarrow a-3b = 1$$

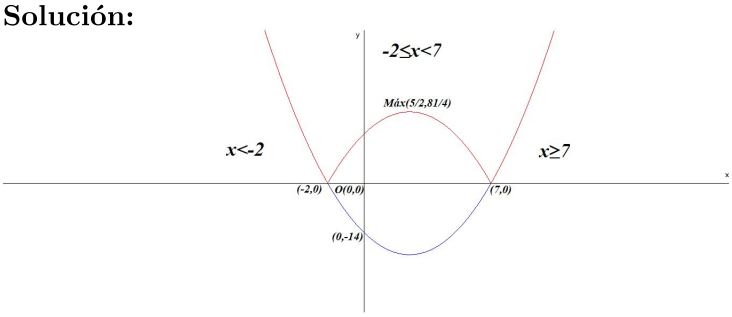
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x-b) = 1-b \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax+3}{2} = \dfrac{a+3}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{a+3}{2} = 1-b \Longrightarrow a+2b = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - 3b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1/5 \\ b = -2/5 \end{array} \right.$$

**Problema 0.4** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x - 14$ y representarla gráficamente.

**Solución:**




Hacemos $g(x) = x^2 - 5x - 14 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $-14$ |
| $-2$ | $0$ |
| $7$ | $0$ |
| $-5/2$ | $-81/4$ |

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{81}{4}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{5}{2}, \frac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 5x - 14 & \text{si} & x \leq -2 \\ -(x^2 - 5x - 14) & \text{si} & -2 < x \leq 7 \\ x^2 - 5x - 14 & \text{si} & 7 \leq x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 + 5x + 14) = 0$$

$$f(-2) = 0$$

y $f$ es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 5x + 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 5x - 14) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 5 & \text{si} & x \leq -2 \\ -2x + 5 & \text{si} & -2 < x \leq 7 \\ 2x - 5 & \text{si} & 7 \leq x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -2$: $f'(-2^-) = -9$ y $f'(-2^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -2$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -9$ y $f'(7^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 7$.

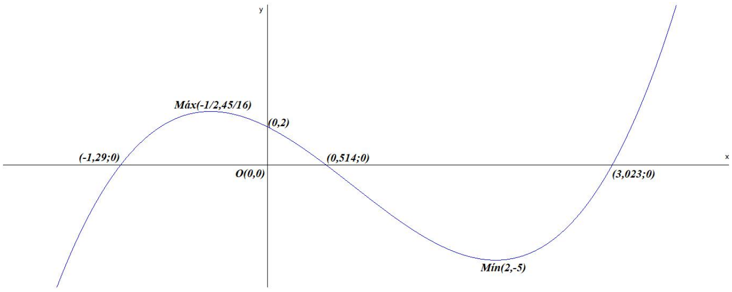
Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 7\}$.

**Problema 0.5** Dada la función $f(x) = x^3 - 5ax^2 + 2bx - c$, encontrar los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, -5)$. Decidir de que extremo se trata.
**Solución:**

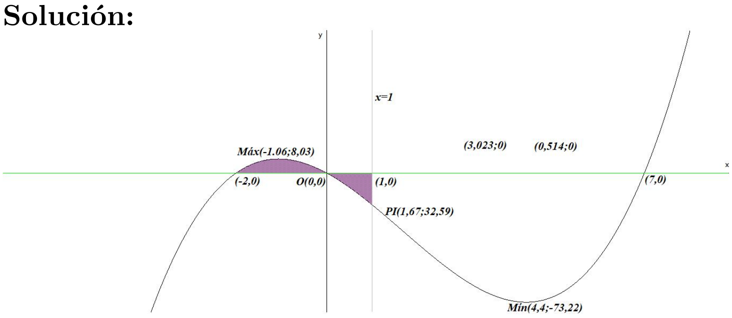
$$f(x) = x^3 - 5ax^2 + 2bx - c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 10ax + 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow -c = 2 \\ f(2) = -5 \Longrightarrow -20a + 4b - c + 8 = -5 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow -20a + 2b + 12 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 9/20 \\ b = -3/2 \\ c = -2 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 3x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}x - 3$ y $f''(x) = 6x - \frac{9}{2} \Longrightarrow f''(2) = \frac{15}{2} > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.




**Problema 0.6** Dada la función $f(x) = x^3 - 5x^2 - 14x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje $OX$ y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.
**Solución:**




$$x^3 - 5x^2 - 14x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -2 \text{ y } x = 7$$

Tendremos dos áreas a calcular $S_1$ con los límites de integración entre -2 y 0, y otra $S_2$ entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 - 5x^2 - 14x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} - 7x^2$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} f(x)\, dx = F(0) - F(-2) = \frac{32}{3}, \;\; S_2 = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{101}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{32}{3} + \frac{101}{12} = \frac{229}{12} \simeq 19,083 \; u^2$$