Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2 puntos)*Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A.

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.

d) Resolver la ecuación $AB - AX = BA$.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $|B| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

c) $|AB| = |A||B| = -1 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow \nexists (AB)^{-1}$

d) $AB - AX = BA \Longrightarrow AX = AB - BA \Longrightarrow X = A^{-1}(AB - BA)$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)*En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2,75, 3 y 2,50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111,5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fue el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el número de kilos de judías blancas, y el número de kilos de judías canela y z el número de kilos de judías pintas.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ 2,75x + 3y + 2,5z = 111,5 \\ x + y = 3z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ 11x + 12y + 10z = 446 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ 11x + 12y + 10z = 446 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 14 \\ y = 16 \\ z = 10 \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices $A + B$ y $3C - B$

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B = 3C-B$ y resuélvalo.

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$3C - B = 3\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+b = 3c-b \\ a-b = -9+b \\ a+3 = 3c-3 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a+2b-3c = 0 \\ a-2b = -9 \\ a-3c = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 y A^3.

b) Calcular A^n y en particular A^{14}.

c) Resolver la ecuación matricial $AX + \frac{1}{5}B^tB = 2A$, donde B^t es la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$

c) $AX + \frac{1}{5}B^tB = 2A \Longrightarrow X = A^{-1}\left(2A - \dfrac{1}{5}B^tB\right)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 8/5 & 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 3/5 & 11/5 \end{pmatrix}$$

Problema 5 *(2 puntos)*Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} x+ay=0\\ x+2z=0\\ x+ay+(a+1)z=a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$; $|A|=-a(a+1)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=-1$.

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,-1\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(A)=$ n$^{\underline{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow SCD$: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a=-1$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a=0$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-F_2 \end{array}\right]=$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow SCI$: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x=0\\ 2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\lambda\\ z=0 \end{array}\right.$$