Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2 puntos)*Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rr} x+ay+z= & 6\\ 2x-y+z= & a-1\\ -x+y+z= & 2 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a\in\mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & 1 & 6\\ 2 & -1 & 1 & a-1\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);\quad |A|=-3a-1=0\Longrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

- Si $a\neq-\dfrac{1}{3}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-\dfrac{1}{3}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 6\\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3}\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)=\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18\\ 6 & -3 & 3 & -4\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ 3F_3+F_1 \end{array}\right]=\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18\\ 0 & -1 & -3 & -40\\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+2F_2 \end{array}\right]=$$

$$\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18\\ 0 & -1 & 1 & -40\\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{rr} x+2y+z= & 6\\ 2x-y+z= & 1\\ -x+y+z= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2\\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)*Consideramos las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 1 & 2 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

a) Calcula la matriz $B^T\cdot A\cdot B$

b) Calcula la inversa de la matriz $A-I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despeja la matriz X en la ecuación matricial $AX-B=X$ y calcúlala.

Solución:

a) $B^T \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $AX - B = X \Longrightarrow AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B$

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(AB)^{-1}$.

b) Calcula $AB^T - A^T B$.

c) Resolver la ecuación $B^T X + A^T B = A^T$.

Siendo A^T y B^T las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.

Solución:

a) $(AB)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

b) $AB^T - A^T B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B^T X + A^T B = A^T \Longrightarrow B^T X = A^T - A^T B \Longrightarrow X = (B^T)^{-1} A^T (I - B)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)*Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = -\dfrac{3}{7}B = \begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ 0 & 3/7 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \dfrac{1}{7}(7A + B) = \begin{pmatrix} 6/7 & 36/7 \\ 0 & -22/7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 5 *(2 puntos)*Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sean x el número de archivadores, y el número de cuadernos y z el número de carpetas.

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600 \\ y=\frac{z}{4} \\ x+z=165 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600 \\ 4y-z=0 \\ x+z=165 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{array}\right)$, $|A|=13\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600 \\ 4y-z=0 \\ x+z=165 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=45 \\ y=30 \\ z=120 \end{array}\right.$$