Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2 puntos)*Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Si $A - B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución:

a) $A - B \cdot C = D \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} my - 1 \\ mx - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x - my + 1 \\ -mx + y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - my = -1 \\ -mx + y = -1 \end{cases}$

b) $\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & -1 \end{array}\right)$, $|M| = 1 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$.

Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 2 =$Rango$(\overline{M}) =$ nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.

Si $m = -1$: $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado y el sistema tendría infinitas soluciones.

Si $m = 1$: $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.

Luego de existir solución puede no ser única.

Si $m = 2$: $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Problema 2 *(2 puntos)*En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución: Sea x el nº de fotocopias en blanco y negro e y el nº de fotocopias en color.

a) $\begin{cases} x+y=550 \\ mx+4my=350 \end{cases}$

b) $\overline{M}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 550 \\ m & 4m & 350 \end{array}\right)$, $|M|=3m=0 \Longrightarrow m=0$.

Si $m \neq 0 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M)=2=$Rango$(\overline{M})=$ nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.

Si $m=0$: $\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc} 10 & 1 & 550 \\ 0 & 0 & 350 \end{array}\right) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.

c) Si la fotocopia en color costó $2=4m \Longrightarrow m=0,5$ $m=2 \Longrightarrow \begin{cases} x+y=550 \\ 0,5x+2y=350 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x=500 \\ y=50 \end{cases}$

Problema 3 *(2 puntos)*Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ ax+2y-z=3a \\ 2x+ay-z=6 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -1 & 6 \end{array}\right); \quad |A|=2a-a^2=0 \Longrightarrow a=0, \ a=2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2\\ 2x+2y-z=6\\ 2x+2y-z=6\end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right] = \left\{\begin{array}{l} x+y-z=2\\ z=2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4-\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0\\ -4 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcula $M = AC - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $XB = \begin{pmatrix} 2 & 4\end{pmatrix}$

Solución:

a) $M = AC - (B-I)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0\\ -4 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^T =$

$\begin{pmatrix} 7 & 2\\ 26 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 2\\ 26 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2\\ 24 & 0\end{pmatrix}$

b) $XB = \begin{pmatrix} 2 & 4\end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 4\end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3\end{pmatrix}$