Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2,5 puntos)*Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple. La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

Solución:

a)

	Individual	Doble	Triple
Agencia 1	65	85	104
Agencia 2	78	83	106

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix}$$

	Instituto 1	Instituto 2	Instituto 3
Individual	3	2	1
Doble	15	12	16
Triple	2	5	7

$$\Longrightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b) $$A \cdot D = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

	Instituto 1	Instituto 2	Instituto 3
Agencia 1	1678	1670	2153
Agencia 2	1691	1682	2148

Al Instituto 1 y al Instituto 2 les interesaría contratar con la Agencia 1, mientras que al Instituto 3 le interesaría la Agencia 2.

c) La matriz A no es cuadrada y, por tanto, no tiene inversa.
$|D| = -83 \Longrightarrow \exists D^{-1}$ (Si existe inversa de D)

Problema 2 *(2,5 puntos)*Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

Solución:

a) $AB = C \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2x-2y-1 & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2x-2y-1=2 \\ x-4y=-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-9/5 \\ y=3/10 \end{cases}$

b) $|C| = -19 \neq 0 \Longrightarrow \exists C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2,5 puntos)*En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

Solución:
Sea x: nº de niños, y: nº de jóvenes y z: nº de adultos.

$$\begin{cases} x+2y+5z=600 \\ z=2(x+y) \\ y+100=x+z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y+5z=600 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-y+z=100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=28 \\ z=104 \end{cases}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sean A, B, X e Y matrices invertibles que verifican $AX = B$ y $BY = A$.

a) Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ halle X e Y.

Solución:

a) $BY = A$ y $AX = B \Longrightarrow AXY = A \Longrightarrow A^{-1}AXY = A^{-1}A \Longrightarrow XY = I \Longrightarrow XYY^{-1} = I \cdot Y^{-1} \Longrightarrow X = Y^{-1}$

b) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$BY = A \Longrightarrow Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$