Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Diciembre 2020

Problema 1 Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right); \quad |A| = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$$

- Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{4} \\ y = -\dfrac{7}{2} \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Problema 2 Una empresa diseña y vende dos tipos de telas ($T1$ y $T2$) con un precio de venta de 60 €/m^2 y 100 €/m^2, respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m^2 de telas. Para elaborar un m^2 de tela $T1$ se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m^2 de tela $T2$ se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m^2 de cada tipo de tela es 15 y 10 €, respectivamente?

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m^2 de tela $T1$ que de tela $T2$.

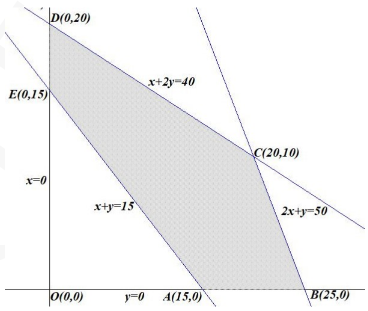
Solución:

Llamamos x : nº de m^2 de la tela $T1$ e y : nº de m^2 de la tela $T2$.

	Horas máquina	Carretes hilo	Venta	Coste	Beneficio
$T1$	2	6	60	15	45
$T2$	4	3	100	10	90
	≤ 80	≤ 150			

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ 2x+4y \leq 80 \\ 6x+3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \geq 15 \\ x+2y \leq 40 \\ 2x+y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

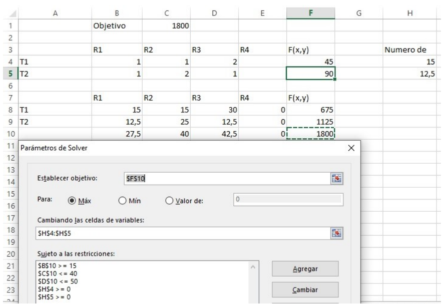


Los vértices son: $A(15,0)$, $B(25,0)$, $C(20,10)$, $D(0,20)$ y $E(0,15)$.

b) La función objetivo es: $f(x,y) = 45x + 90y$

$$\begin{cases} f(15,0) = 675 \\ f(25,0) = 1125 \\ f(20,10) = 1800 \ \text{Máximo} \\ f(0,20) = 1800 \\ f(0,15) = 1350 \end{cases}$$

Solución por solver :

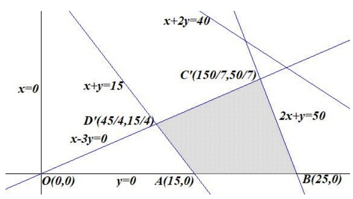


La solución no es única, será cualquier punto del segmento que une el punto $C(20,10)$ con el punto $D(0,20)$ con máximo beneficio de 1800 €.

Este segmento sería $\left\{(x,y)/y = \dfrac{40-x}{2}, \ \forall x \in [0,20]\right\}$

c) Tenemos que añadir la inecuación $x \geq 3y$. Con esta inecuación tendríamos la siguiente región factible:

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x+y \geq 15 \\ 2x+4y \leq 80 \\ 6x+3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-3y \geq 0 \\ x+y \geq 15 \\ x+2y \leq 40 \\ 2x+y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Ahora los vértices son: $A(15,0)$, $B(25,0)$, $C'\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{50}{7}\right)$ y $D'\left(\dfrac{45}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$

La función objetivo es: $f(x,y) = 45x + 90y$

$$\begin{cases} f(15,0) = 2100 \\ f(25,0) = 2100 \\ f\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{50}{7}\right) = 1607,14 \ \text{Máximo} \\ f\left(\dfrac{45}{4}, \dfrac{15}{4}\right) = 843,75 \end{cases}$$

De tela $T1$ habría que vender 21,43 m^2 y de la $T2$ habría que vender 7,14 m^2, con un beneficio de 1607,14 €.

Solución por solver :