Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2021

Los problemas fueron propuestos en las pruebas de selectividad de diferentes comunidades autónomas en el año 2020. De los seis problemas hay que resolver cinco de ellos, en el caso de que resuelvas los seis ten en cuenta que eliminaré, para la puntuación del examen, el que mejor puntuación tenga.

Problema 1 Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+y=2\\ y+z=0\end{array}\right.$

a) Calcula un vector director de la recta r.

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r.

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=2\\ y+z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1)\\ P_r(2,0,0)\end{array}\right.$$

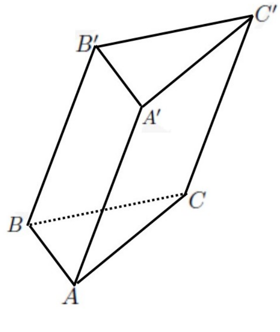
b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1)\\ \overrightarrow{P_rA}=(0,1,1)\\ P_r(2,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x-2 & y & z\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi: 2x+y-z-4=0$$

c) $\overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_\pi}$ y $\overrightarrow{u_s}\perp\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{array}\right|=3(0,1,1)$

$$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(0,1,1)\\ P_s=A(2,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos)



de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$, $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A, B, C y π', al que pertenecen los puntos A', B', C'. Calcula:

a) Las coordenadas de los puntos restantes: A', B.

b) La distancia entre los planos π y π'.

c) El volumen del prisma triangular.

Solución:

a) $A'=A+\overrightarrow{AA'}=A+\overrightarrow{CC'}=(1,0,0)+[(0,4,2)-(0,3,0)]=(1,1,2)\Longrightarrow A'(1,1,2)$
$B=C+\overrightarrow{CB}=C+\overrightarrow{C'B'}=(0,3,0)+[(-1,2,2)-(0,4,2)]=(-1,1,0)\Longrightarrow B(-1,1,0)$

b)

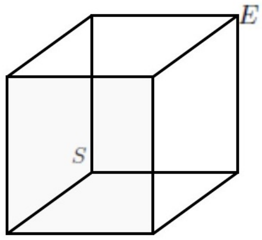
$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,3,0) \\ A(1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : -5z = 0 \Longrightarrow \pi : z = 0$$

$$d(\pi, \pi') = d(C', \pi) = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{0+0+1}} = 2\ u$$

c)

$$V = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}\right]\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|-10| = 5\ u^3$$

Problema 3 Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:



a) El cuarto vértice D de la cara S.

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?

Solución:

a) Como no conocemos el orden de los puntos calculamos distancias entre ellos. Como se trata de un cuadrado las distancias de los lados deben de ser iguales. $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(3,4,0)| = 5$, $d(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |(0,0,5)| = 5$, $d(B,C) = \left|\overrightarrow{BC}\right| = |(-3,-4,5)| = \sqrt{30}$. Luego $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son dos lados y $\overline{BC}$ es una diagonal. Luego el punto D está en la diagonal cuyo otro extremo es A. Tendríamos:

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (2,1,0) + ((3,4,0) + (0,0,5)) = (5,5,5) \Longrightarrow D(5,5,5)$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,5) \\ A(2,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 4x - 3y - 5 = 0$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (4,-3,0) \Longrightarrow 4x - 3y + \lambda = 0$$

$$E \in \pi' \Longrightarrow -8 - 12 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 20 \Longrightarrow \pi' : 4x - 3y + 20 = 0$$

c) La distancia desde E a su adyacente tiene que ser 5, probando tenemos $d(E,A) = \left|\overrightarrow{EA}\right| = |(4,-3,0)| = 5$. Luego el punto adyacente al E es A.

Problema 4 Dados dos planos $\begin{cases} \pi : x + y - 2z = 3 \\ \pi' : x - z = 5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A.

b) Calcula el punto P.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (1, 0, -1) \\ P_r = A(5, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow (x, y, z) = (5, 1, 0) + \lambda(1, 0, -1) \;\; \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{array} \right. \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 5 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

b) Buscamos el punto de corte de r con π:

$$(5 + \lambda) + 1 - 2(-\lambda) = 3 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P(4, 1, 1)$$

Problema 5 Se emite un rayo láser desde el punto $P(1, 2, 8)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (1, 2, -3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

a) Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

b) Determina la posición relativa de rayo y lámina.

c) Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (1, 2, -3) \\ P_r = P(1, 2, 8) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{array} \right. \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

b) $\pi : -x - y + 3z = -8 \Longrightarrow -(1 + \lambda) - (2 + 2\lambda) + 3(8 - 3\lambda) = -8 \Longrightarrow \lambda = \frac{29}{12} \Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto.

c) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -3) \Longrightarrow \pi' : x + 2y - 3z + \lambda = 0$ como $O(0, 0, 0) \in \pi' \Longrightarrow 0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : x + 2y - 3z = 0$

Problema 6 Considera los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, -4)$, $C(4, 3, 2)$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

c) Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, -5) \\ P_r = A(1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{array} \right. \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,1,-5) \\ \overrightarrow{AC} = (3,1,1) \\ A(1,2,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 3x - 8y - z + 14 = 0$$

c)

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|2(3,-8,1)| = \sqrt{74}\ u^2$$