Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2021

Problema 1 Se considera la recta $r : \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto $(0, 0, 1)$.

b) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Sabiendo que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (-1, 1, 1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 1) \\ \overrightarrow{PP_r} = (1, 1, -1) \\ P(0, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + z - 1 = 0$$

b) $V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}]| = |[\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]| = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})| = |(-1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1)| = 1 + 1 + 1 = 3\ u^3$

Problema 2 Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta
$r : \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$

Solución:

$$r : \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, -5, 1) \\ P_r(1, -4, 0) \end{cases}$$

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, -5, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 3) \\ P_r(1, -4, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : 2x + y - z + 2 = 0$$

Problema 3 Los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r : \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C.

b) Calcula el área del triángulo.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 4 \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 0) \\ P_r(4, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow C(4, \lambda, 1)$$

a) $\overrightarrow{AC} = (4, \lambda, 1) - (0, 1, 0) = (4, \lambda - 1, 1)$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow (4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow C(4, 1, 1)$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1) - (0, 1, 0) = (-1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (4, 0, 1)$.

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(0, 5, 0)| = \frac{5}{2}\, u^2$$

Problema 4 Dados los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas.

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1) = -(1, 1, 1) \\ P_r = B(1, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \mu \\ z = -\mu \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -1) \\ P_s(2, 0, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, 0, 0) - (1, 0, -1) = (1, 0, 1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$$

Las dos rectas están en el mismo plano, y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Sea $C(2 - \mu, \mu, -\mu)$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - \mu, \mu, -\mu) - (2, 1, 0) = (-\mu, \mu - 1, -\mu),$$

$$\overrightarrow{CB} = (1, 0, -1) - (2 - \mu, \mu, -\mu) = (-1 + \mu, -\mu, -1 + \mu)$$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Longrightarrow (-\mu, \mu - 1, -\mu) \cdot (-1 + \mu, -\mu, -1 + \mu) = 0 \Longrightarrow$$

$$-\mu(-1 + \mu) + (\mu - 1)(-\mu) + (-\mu)(-1 + \mu) = -3\mu^2 + 3\mu = 0 \Longrightarrow \mu = 0, \ \ \mu = 1$$

Si $\mu = 0 \Longrightarrow C(2, 0, 0)$
Si $\mu = 1 \Longrightarrow C(1, 1, -1)$