# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

**Febrero 2021**

**Problema 1** Considera el plano $\pi : x - y + az = 0$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{array} \right.$

a) Halla $a$ sabiendo que $\pi$ es paralelo a $r$.

b) Determina el plano perpendicular a $r$ que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 5\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (5, 8, 1) \\ P_r(-2, -3, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, a)$$

a) $\pi \parallel r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow 5 - 8 + a = 0 \Longrightarrow a = 3$

b) $\pi' \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (5, 8, 1) \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z + \alpha = 0$. Como $P \in \pi' \Longrightarrow \pi' : 5 + 16 + 3 + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -24 \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z - 24 = 0$

**Problema 2** Considera el plano $\pi : x - y + z = 2$ y la recta $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre $r$ y $\pi$.

b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a $\pi$ que contiene a $r$.

**Solución:**

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1) \\ P_r(0, -1, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 1)$

$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 2 - 1 - 1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow r \parallel \pi$

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$$

b) $\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 1)\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1) \\ P_r(0, -1, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x & y+1 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : y + z + 3 = 0$

**Problema 3** Se pide:

a) Determine el valor de la constante real $m$ para que los cuatro puntos siguientes:

$$A(1, 1, 0), \ B(1, 3, 1), \ C(2, 1, -1), \ D(1, m, m)$$

sean coplanarios, es decir, estén en un mismo plano.

b) Determine el área del triángulo que definen los puntos $A$, $B$ y $C$.

**Solución:**



www.musat.net

a) $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, m-1, m)$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & m-1 & m \end{vmatrix} = -m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1$$

b)

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(-2, 1, -2)| = \frac{1}{2}\sqrt{9} = \frac{3}{2}\ u^2$$

**Problema 4** Determine la ecuación del plano $\pi$ que contiene a las dos rectas $r$ y $s$ siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -4 \\ 3x + 2z = 4 \end{array} \right. \qquad s : x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

**Solución:**
El problema no tiene sentido si las dos rectas se cruzan o coinciden. Estudiamos su posición relativa.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -3) \\ P_r(-4, 0, 8) \end{array} \right.$$

$$s : x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, -1) \\ P_s(0, -1, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{P_sP_r} = (-4, 0, 8) - (0, -1, 1) = (-4, 1, 7)$$

$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_sP_r}\right] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y Rango$(A) = 2$ y Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}$ =Rango$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y $s$ se cortan.
La ecuación del plano $\pi$ que contiene a las dos rectas sería:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -3) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 2, -1) \\ P_s(0, -1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 5x - y + 3z - 4 = 0$$