Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2020

Problema 1 Considera la recta $r : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 : x = 0$ y $\pi_2 : y = 0$.

a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P_r(2, 2, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Longrightarrow |2 - \lambda| = |2 + 3\lambda| \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 - \lambda = 2 + 3\lambda \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(2, 2, 1) \\ 2 - \lambda = -2 - 3\lambda \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow P(4, -4, -1) \end{cases}$$

b) $t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 0, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_r} = (2, 2, 1)$

$[\overrightarrow{P_tP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_t}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Longrightarrow r$ y t se cruzan.

Problema 2 Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-3, -2, -1)| = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-1+2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \Longrightarrow \alpha = 7502'13''$$

Problema 3 Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r : x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.

b) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Solución:

a) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,a)\\ P_r(1,2,1)\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=1+a\lambda\end{cases}$, $s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(-a,-1,2)\\ P_s(3,3,-1)\end{cases}\Longrightarrow s:\begin{cases}x=3-a\mu\\ y=3-\mu\\ z=-1+2\mu\end{cases}$

y $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,1,-2)$

$$|A|=[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_t}]=\begin{vmatrix}2&1&-2\\1&1&a\\-a&-1&2\end{vmatrix}=-a^2+4=0\Longrightarrow a=\pm 2.$$

- Si $a\neq\pm 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow r$ y s se cruzan.
- Si $a=-2\Longrightarrow$Rango$(A)=2$ y Rango$\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=$Rango$\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&-1&2\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.
- Si $a=2\Longrightarrow$Rango$(A)=2$ y Rango$\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=$Rango$\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&-1&2\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Calculamos el punto P de corte entre r y s:

$$\begin{cases}1+\lambda=3-2\mu\\ 2+\lambda=3-\mu\\ 1+2\lambda=-1+2\mu\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \mu=1\end{cases}\Longrightarrow P(1,2,1)$$

La recta $t\perp r$ y $s\Longrightarrow \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&1&2\\-2&-1&2\end{vmatrix}=(4,-6,1)$

$t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(4,-6,1)\\ P_t(1,2,1)\end{cases}\Longrightarrow t:\begin{cases}x=1+4\lambda\\ y=2-6\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$

Problema 4 Se considera el punto $A(1,-2,0)$y la recta $r:\begin{cases}x+y=0\\ y-3z+2=0\end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Solución:

a) $r:\begin{cases}x+y=0\\ y-3z+2=0\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=2-3\lambda\\ y=-2+3\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-3,3,1)\\ P_r(2,-2,0)\end{cases}$

$\pi\perp r\Longrightarrow\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}\Longrightarrow\pi:-3x+3y+z+\alpha=0$, como $A\in\pi\Longrightarrow -3-6+0+\alpha=0\Longrightarrow$ $\alpha=9\Longrightarrow\pi:-3x+3y+z+9=0\Longrightarrow\pi:3x-3y-z-9=0$

b) $\pi':\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-3,3,1)\\ \overrightarrow{AP_r}=(1,0,0)\\ A(1,-2,0)\end{cases}\Longrightarrow\pi':\begin{vmatrix}x-1&y+2&z\\-3&3&1\\1&0&0\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\pi':y-3z+2=0$