Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2020

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, -m, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 3, m)$ y $\overrightarrow{w} = (4, 1, -1)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & -m & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5(m^2 + m - 2) = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = -2$$

Si $m = 1$ o $m = -2$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

a) Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, -3m, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 1, m+2)$ sean perpendiculares.

b) Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ y a $\overrightarrow{v} = (2, 0, 2)$ que tenga módulo 5.

c) Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 3, 2)$ y $\overrightarrow{v} = (5, -1, -1)$ son perpendiculares.

Solución:

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = m - 3m + m + 2 = 0 \Longrightarrow m = 2$

b)

$$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(1, -1, -1) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = 4\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{t} = \frac{5 \cdot 4}{4\sqrt{3}}(1, -1, -1) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$$

c) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5 - 3 - 2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 0, 4)$, $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 3, 1)$. Calcular:

a) Volumen de paralelepípedo que determinan.

b) Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

c) Altura del paralelepípedo.

d) Volumen del tetraedro que determinan.

e) Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

f) Altura del tetraedro.

Solución:

a)
$$V_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11\ u^3$$

b)
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}| = |(4, 4, -1)| = \sqrt{33}\ u^2$$
$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \sqrt{\frac{33}{2}}\ u$$

c)
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{\sqrt{66}}{3}\ u$$

d)
$$V_t = \frac{11}{6}\ u^3$$

e)
$$S_t = \frac{\sqrt{33}}{2}\ u^2,\ \ h_t = h_p = \sqrt{\frac{33}{2}}\ u$$

f)
$$H_t = H_p = \frac{\sqrt{66}}{3}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-1, 2, -3)$, $B(3, 1, 4)$ y $C(8, 6, 5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Encontrar el 4º vértice D.

b) Calcular la longitud de sus lados.

c) Calcular sus ángulos y su centro.

d) Calcular el punto simétrico de A respecto de C.

e) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

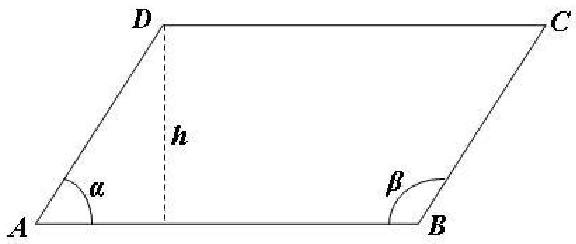
Solución

a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, 2, -3) + (5, 5, 1) = (4, 7, -2)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(4, -1, 7)| = \sqrt{66}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(5, 5, 1)| = \sqrt{51}$

c)
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{22}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{51}} \Longrightarrow \alpha = 59°6'25'' \text{ y } \beta = 120°53'35''$$

El centro es $M\left(\frac{7}{2}, 4, 1\right)$



d) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (17, 10, 13)$

e)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(9,4,8) = \left(3, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-1, 2, -3) + \left(3, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(2, \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(2, \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(3, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(5, \frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(5, \frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right) + \left(3, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = (8, 6, 5)$$