Examen de Matemáticas II (Coincidente 2021)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

b) (0,75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m.

c) (0,5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$.

Solución:

a) $|A| = -m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1 \Longrightarrow \exists\, A^{-1} \;\; \forall m \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ con $|A| = -m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1$

- ☛ Si $m \neq -12 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

c) Si $m = 2$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

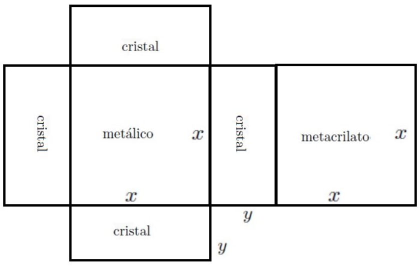
$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m^2, el material metálico, de 90 euros/m^2, y el cristal, de 25 euros/m^2.

a) (0,75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.

b) (1,75 puntos) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

Solución:



a) $C = 15x^2 + 90x^2 + 4\cdot 25xy = 105x^2 + 100xy \Longrightarrow y = \dfrac{C - 105x^2}{100x}$

b) $V(x,y) = x^2y \Longrightarrow V(x) = x^2\dfrac{1260 - 105x^2}{100x} = \dfrac{1260x - 105x^3}{100}$

$V'(x) = -\dfrac{63(x^2-4)}{20} = 0 \Longrightarrow x = 2$ (el valor $x = -2$ no es relevante)

$V''(x) = -\dfrac{63x}{10} \Longrightarrow V''(2) = -\dfrac{126}{10} < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo.

Luego las dimensiones de los cuadrados son de 2 m de lado y las caras verticales serían de 2 m por $y = \dfrac{1260 - 105\cdot 4}{100\cdot 2} = \dfrac{21}{5}$ m.

El volumen máximo es $V(2) = \dfrac{1260\cdot 2 - 105\cdot 2^3}{100} = \dfrac{84}{5} \simeq 16,8$ m^3.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Desde el punto $P_1 = (1, 1, -1)$ se ha trazado una recta, r, perpendicular a un plano, π. El punto de intersección del plano con la recta es $P_2 = (0, 0, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación de la recta r.

b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano π.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia de P_1 al plano π.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{P_2P_1} = (1, 1, -1) \\ P_r = P_2 = (0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

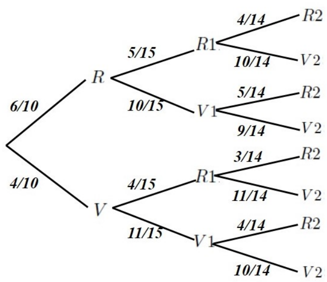
b) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \Longrightarrow \pi : x + y - z + \lambda = 0$ como $P_2(0, 0, 0) \in \pi \Longrightarrow$ $0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x + y - z = 0$

c) $d(P_1, \pi) = \dfrac{|1 + 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$

Problema 4 *(2,5 puntos)* En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.

Solución:

R sale rojo en el cajón 1, V sale verde en el cajón 1, $R1$ sale primero rojo en el cajón 2, $V1$ sale primero verde en el cajón 2, $R2$ sale segundo rojo en el cajón 2 y $V2$ sale segundo verde en el cajón 2



$$P(\text{mismo color}) = P(\text{dos rojas}) + P(\text{dos verdes}) =$$

$$P(R \cap R1 \cap R2) + P(V \cap R1 \cap R2) + P(R \cap V1 \cap V2) + P(V \cap V1 \cap V2) =$$

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{41}{75} \simeq 0,5467$$

Examen de Matemáticas II (Coincidente 2020)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Una tienda online de productos gourmet elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a 7,85 euros/kg), el Paradiso (a 13,3 euros/kg) y el Cremissimo (a 24,85 euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90 % de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %.
A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27,1 kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de 3112,5 euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.

Solución:
Sean x los kg café Gold Cuvée, y los kg café Paradiso y z los kg café Cremissimo.

$$\begin{cases} 7,85x + 13,3y + 24,85z = 3112,5 \\ 0,1x + 0,15y + 0,20z = 27,1 \\ z = 2(x+y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 157x + 266y + 497z = 62250 \\ 2x + 3y + 4z = 542 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 22 \\ z = 104 \end{cases}$$

Los kg de tipo Arábica utilizados son $0,9x + 0,85y + 0,8z = 0,9 \cdot 30 + 0,85 \cdot 22 + 0,8 \cdot 104 = 128,9$ kg.

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $[-2,4]$.

b) (1,25 puntos) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de f en $[-2,4]$.

c) (0,75 puntos) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ es continua en $x = 2$ y si tiene recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) La función es siempre positiva y su dominio es toda la recta real. Se trata de un polinomio y, la raíz que lo contiene es impar, luego es continua en todo el dominio. El único punto a estudiar sería en $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $[-2,4]$

La función es derivable en todos los puntos salvo en $x = 2$ donde lo estudiaremos:

$$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-2)^3}} \Longrightarrow f'(2^+) = \infty \quad f'(2^-) = -\infty$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$ en nuestro caso la función es derivable en $[-2, 2) \cup (2, 4]$.

b) $f'(x) < 0$ en el intervalo $[-2, 2)$ y, por tanto, decreciente. $f'(x) > 0$ en el intervalo $(2, 4]$ y, por tanto, creciente. No tiene máximos relativos. Comprobamos los valores de la función en $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = \sqrt[5]{16}$ y en $x = 4 \Longrightarrow f(4) = \sqrt[5]{4}$, luego hay un máximo absoluto en $\left(-2, \sqrt[5]{16}\right)$ y un mínimo relativo y absoluto en $(2, 0)$.

c) La función no es derivable en $x = 2 \Longrightarrow$ no existe recta tangente a f en $x = 2$.

Problema 3 *(2,5 puntos)* En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2, 3, -5)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-1, -2, 2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45°, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π, desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (-1, -2, 2) \\ P_r = P(2, 3, -5) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo en el plano:

$$3(2 - \lambda) - 2(3 - 2\lambda) - 2(-5 + 2\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow P_1(-1, -3, 1)$$

b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \dfrac{|(-1,-2,2)\cdot(3,-2,-2)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{|-3+4-4|}{3\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17} \Longrightarrow \alpha = 14^\circ 2' 11'' \Longrightarrow$ no se realiza la perforación.

c) Hay que calcular el punto simétrico de P respecto de π:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (3,-2,-2) \\ P_r = P(2,3,-5) \end{array} \right. \Longrightarrow t: \left\{ \begin{array}{l} x = 2+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = -5-2\lambda \end{array} \right.$$

- ☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π

$$3(2+3\lambda) - 2(3-2\lambda) - 2(-5-2\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{9}{17} \Longrightarrow$$

$$P'\left(\frac{7}{17}, \frac{69}{17}, -\frac{67}{17}\right)$$

- ☛ El punto P' calculado en apartado anterior será el punto medio entre el buscado P'' y el dado P:
$P' = \dfrac{P+P''}{2} \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\dfrac{14}{17}, \dfrac{138}{17}, -\dfrac{134}{17}\right) - (2,3,-5) = \left(-\dfrac{20}{17}, \dfrac{87}{17}, -\dfrac{49}{17}\right)$

Problema 4 *(2,5 puntos)* El delantero de un equipo de fútbol, que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.

c) (1 punto) Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0,999.

Solución:

a) $B(4; 0,6)$, $n = 4$, $p = 0,6$ y $q = 1 - p = 0,4$

$$P(X=0) = \binom{4}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^4 = 0,0256$$

b) $B(4; 0,6)$, $n = 4$, $p = 0,6$ y $q = 1 - p = 0,4$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) =$$

$$\binom{4}{3} 0,6^3 \cdot 0,4^1 + \binom{4}{4} 0,6^4 \cdot 0,4^0 = 0,4752$$

c) la probabilidad de marcar si se lanzan n disparos es $1 - 0,4^n$ y esta probabilidad debe de ser mayor de $0,999$:

$$1 - 0,4^n > 0,999 \Longrightarrow 0,4^n < 0,001 \Longrightarrow n \ln 0,4 > \ln 0,001 \Longrightarrow$$

$$n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,4} = 7,5388 \Longrightarrow n = 8$$